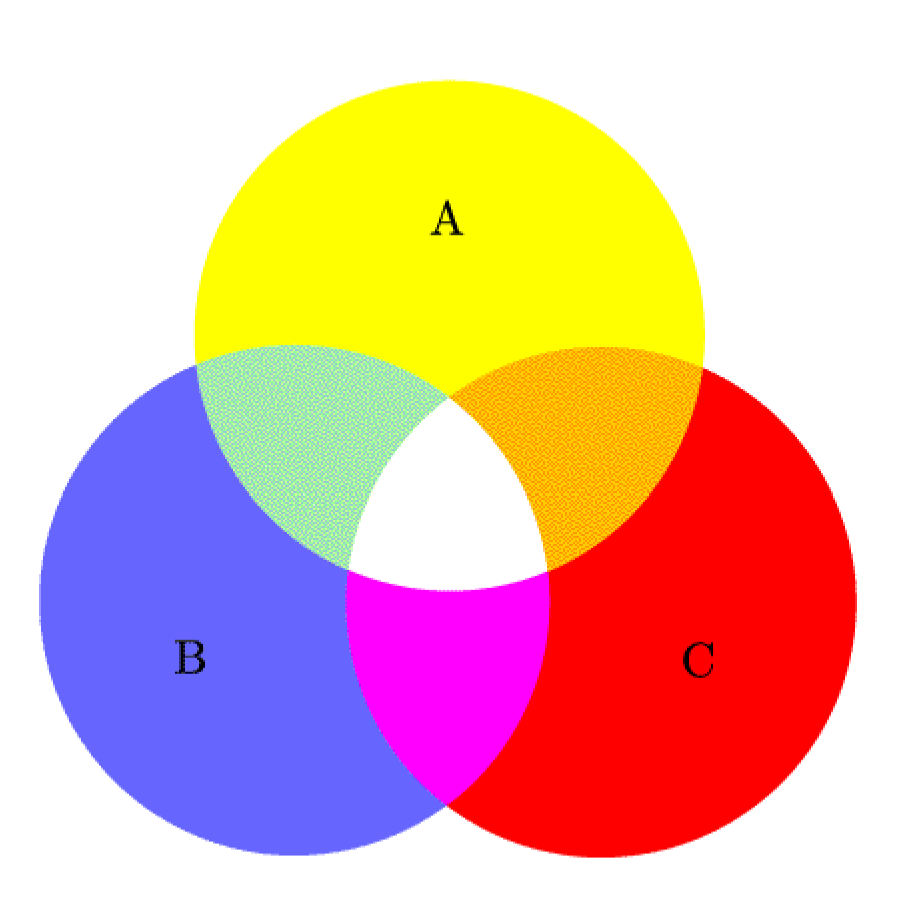
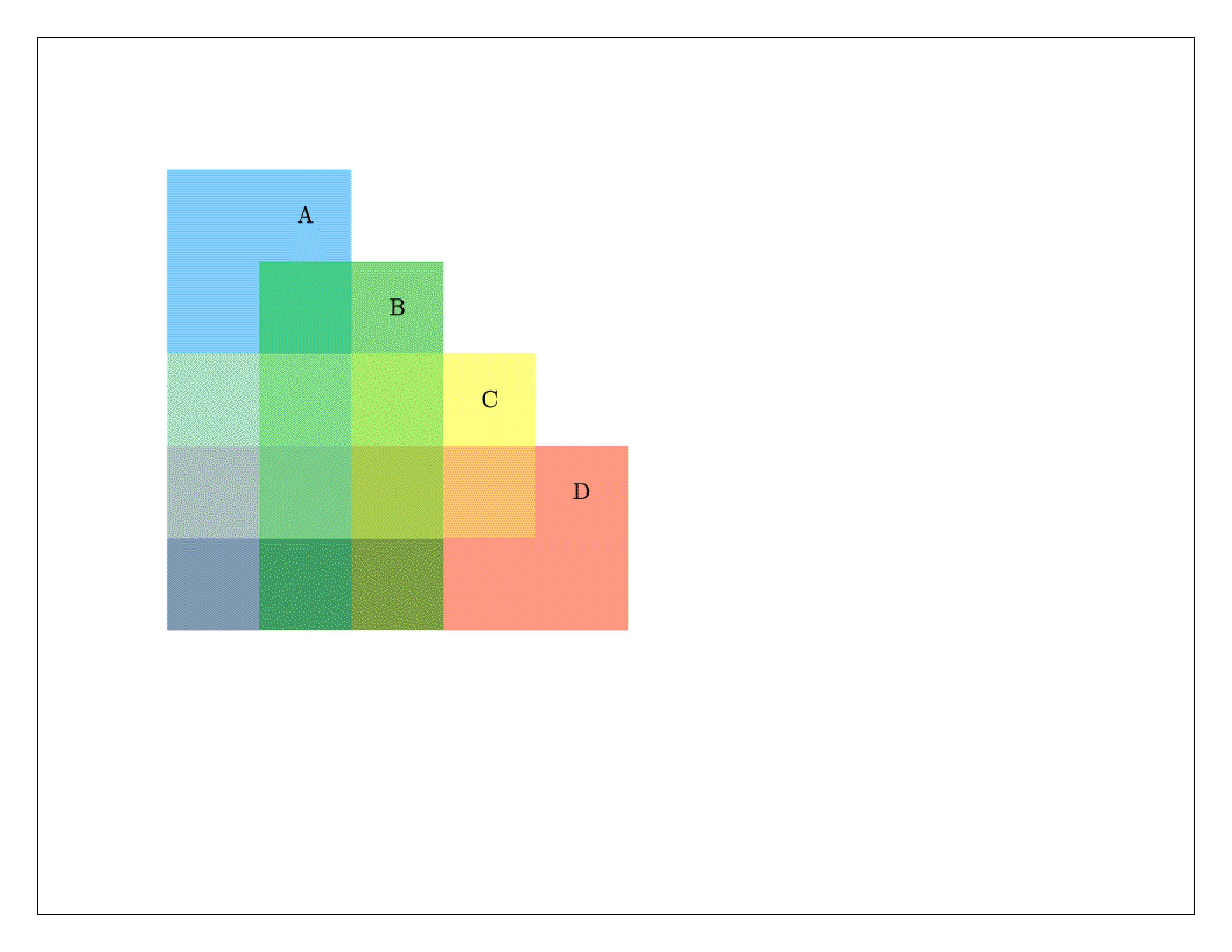
الرياضيات خطوة بخطوة

د.عمار شرقية




A
B
C
D

الرياضيات خطوة بخطوة ـالمجموعات و العناصر -Sets and Elements نظرية المجموعاتset theory

المجموعة هي ببساطة الإطار الذي يضم داخله عناصر تنتمي إليه فلأسرة هي مجموعة و أفراد الأسرة هم عناصر في تلك الأسرة و غرفة الصف مجموعة و التلاميذ داخلها هم عناصر في تلك المجموعة و النادي الرياضي مجموعة و اللاعبين الذين يلعبون لصالح ذلك النادي هم عناصر في تلك المجموعة و وكالة السيارات مجموعة و السيارات الموجودة في تلك الوكالة هي عناصر و المدجنة مجموعة بينما الدجاج الموجودة فيها عناصر و هكذا يمكننا أن نسرد آلاف الأمثلة عن المجموعات و العناصر.
نرمز عادةً للمجموعات بأحرف إنكليزية كبيرة بينما نرمز للعناصر التي توجد ضمن تلك المجموعات بأحرف إنكليزية صغيرة.
عندما ينتمي عنصرٌ ما لمجموعةٍ معينة فإننا نرمز لهذا الانتماء بالرمز. ∈
و نستخدم هذا الرمز للدلالة على أن عنصراً ما ينتمي إلى مجموعةٍ ما:
a∈M
العنصر **a** ينتمي إلى المجموعة. **M**
مدرسة خالد بن الوليد∋ سامر
سامر ينتمي إلى مدرسة خالد بن الوليد.

و نعبر عن نفي الانتماء بالرمز∉

a∉ M

العنصر a لا ينتمي للمجموعة. M

محمد ∌ مدرسة خالد بن الوليد

محمد لا ينتمي لمدرسة خالد بن الوليد.

■لا تتغير ماهية المجموعة إذا تغير ترتيب عناصرها أو إذا تكرر أحد عناصرها.

مثال , لدينا المجموعات التالية:

A=(q,w,e)

B=(w,q,e)

C=(e,q,w)

D=(e,e,q,q,w,w)

A=B=C=D

جميع المجموعات السابقة هي مجموعاتٌ متساوية ذلك أن تكرار العناصر أو تغير ترتيبها داخل المجموعة لا يؤثر على ماهية المجموعة.

مبدأ الامتداد **the principle of extension** في علم المجموعات:

و فقاً لهذا المبدأ فإن أي مجموعة يتم تحديدها و تعريفها بناءً على العناصر التي تحتويها تلك المجموعة و لذلك فإننا نعتبر أي مجموعتين بأنهما متساويتين إذا احتوتا على ذات العناصر.

التعبير عن المجموعة:

رأينا سابقاً بأن كل مجموعة تتحدد ماهيتها من خلال عناصرها المكونة و بالتالي فإننا نعرف أي مجموعة و نعبر عنها من خلال سرد العناصر الداخلة في تركيبها.

فنقول بأن المجموعة A مثلاً هي:

A=(1,2,3,4,5)

عرفنا المجموعة A عن طريق سرد العناصر المكونة لها وهي هنا الأعداد 1,2,3,4,5

و وضعنا عناصر المجموعة بين قوسين و فصلناها عن بعضها بواسطة فواصل.

ومن الممكن كذلك ان نعرف المجموعة من خلال ذكر خصائص عناصر تلك المجموعة فنقول مثلاً في تعريف مجموعة تحوي عدداً سلبياً و لتكن المجموعة N مثلاً بأنها:

N=(x:x negative number,x<0)

و تقرأ هذه الصيغة على الشكل التالي:

إن المجموعة N هي المجموعة التي تحوي العنصر x على اعتبار أن x هو عددٌ سلبي أصغر من الصفر.

لاحظ أننا وضعنا محتويات المجموعة بين قوسين.

النقطتين : تعنيان (حيث أو على اعتبار أن.)

negative numberعددٌ سلبي (أصغر من الصفر)

0<أصغر من الصفر.

الفاصلة , تعني حرف العطف (و.)

و هذا يعني بأن المجموعة N تضم جميع الأعداد السلبية.

مثال آخر:

C=(x:x is a letter in the English alphabet,x is a consonant)

إن المجموعةC هي المجموعة التي تحوي العنصر x حيث أن العنصر x هو حرفٌ من حروف الأبجدية

الإنكليزية كما أن العنصر x هو حرفٌ ساكن.
Eاسم المجموعة (حرف كبير)
حيث أن ـ على اعتبار أن:
الفاصلة : تعني (و),
و هذا يعني بأن المجموعة E تضم جميع الأحرف الإنكليزية الساكنة:
E=(b,c,d,e,f,g,q,r,t,p,s,,k…..)
و هذا يعني بأن هذه المجموعة لا تتضمن الأحرف الصوتية:
A,e,o…..
vowels∉C
الأحرف الصوتية لا تنتمي إلى المجموعة. C

■المجموعة الشاملة: universal set
في كل مجالٍ من المجال فإن جميع العناصر التي يختص ذلك المجال بالتعامل معها تنتمي إلى مجموعةٍ كبرى تدعى بالمجموعة الشاملة the universal set فعلى سبيل المثال فإن مجموعة تلاميذ العالم هي مجموعةٌ شاملة تضم جميع تلاميذ العالم و مجموعة الأحرف هي مجموعةٌ شاملة تضم جميع أبجديات العالم و مجموعة الأعداد هي مجموعةٌ شاملة تضم جميع الأعداد سواءً أكانت موجبة أو سالبة فرديةً أو زوجية و مجموعة السيارات تضم جميع أنواع و أصناف السيارات و هكذا.
أحياناً يرمز للمجموعات الشاملة بالحرف. U

■المجموعة الخالية ـ المجموعة المنعدمة العناصر: Empty set - null set
المجموعة الخالية هي مجموعة منعدمة العناصر أي انها لا تحوي أي عنصر و يرمز لهذه المجموعة بالرمز. Ø
و فقاً لنظرية المجموعات فإن هنالك مجموعة خالية وحيدة مهما تغيرت أسماؤها و بالتالي فإن جميع المجموعات الخالية متساوية لأنها لا تحوي أية عناصر كما أن جميع المجموعات الخالية هي في النهاية مجموعةٌ واحدة عديمة العناصر.

■المجموعة الجزئية: subset
تعرف المجموعة الجزئية في الحياة بأنها مجموعة تشكل جزءاً من مجموعة أخرى أكبر منها.
إن العلاقة ما بين مجموعةٍ ما و مجموعة جزئية منها تعرف بأنها علاقة تضمن. inclusion
و في علم المجموعات إذا كان لدينا المجموعتين A و B و كانت عناصر المجموعةA موجودة كذلك ضمن المجموعة B فإننا ندعوا المجموعة A بأنها مجموعةً جزئية من المجموعة. B
مثالٌ:
لنفترض بأن لدينا المجموعة ش و تحوي أشهر السنة الهجرية:
ش = (محرم, صفر, ربيع الأول, ربيع الآخر , جمادى الأولى , جمادى الآخر, رجب , شعبان, رمضان , شوال, ذو القعدة , ذو الحجة)
و انه كانت لدينا المجموعة ح و تحوي الأشهر الحرم:
ح = (محرم, رجب, ذو القعدة , ذو الحجة)
فهذا يعني بأن المجموعة ح أي مجموعة الأشهر الحرم هي مجموعةٌ جزئية من المجموعة ش وهي مجموعة اشهر السنة الهجرية ذلك أن جميع أشهر المجموعة ح أو مجموعة الأشهر الحرم هي موجودةٌ كذلك في المجموعة ش وهي مجموعة أشهر السنة الهجرية.

لنفترض بأنه كان لدينا المجموعة ي و لتكن مجموعة أيام الأسبوع:
ي = (سبت , أحد , اثنين, ثلاثاء, أربعاء, خميس, جمعة(
و لتكن لدينا المجموعة ع وهي مجموعة أيام العطلة:
ع= (الجمعة, السبت(
نلاحظ بأن جميع عناصر المجموعة ع أي مجموعة أيام العطلة موجودةٌ كذلك في المجموعة ي وهي مجموعة أيام الأسبوع وهذا يعني بأن المجموعة ع أي مجموعة أيام العطلة هي مجموعةٌ جزئية من مجموعة أيام الأسبوع أي أننا لو أحطنا عنصري أيام العطلة بدائرة فإننا سنحصل على مجموعة جزئية داخل المجموعة الأم.
ارسم دائرة واكتب داخلها أسماء أيام الأسبوع فتحصل بذلك على مجموعة أيام الأسبوع – الآن أحط يومي العطلة بدائرة فتحصل على مجموعة صغرى داخل مجموعة أيام الأسبوع وهي المجموعة الجزئية.
ارسم دائرة اكتب داخلها اسماء الأشهر الهجرية فتحصل على مجموعة أشهر السنة الهجرية – أحط الأشهر الحرم بدائرة فتحصل على دائرة صغرى داخل دائرة أشهر السنة الهجرية وهذه الدائرة الصغرى تمثل مجموعةً جزئية.
اكتشف المزيد من المجموعات الجزئية من حولك.
يرمز للمجموعة الجزئية بهذا الرمز. ⊂
يرمز للمجموعة الكبرى superset بهذا الرمز. ⊃
فإذا صادفتنا عبارة تقول:
$A \subset B$
فهي عبارة تعني بان المجموعة A هي مجموعةً جزئية من المجموعة B وانها محتواةٌ في تلك المجموعة .
و إذا صافتنا عبارة:
$B \supset A$
فإنها تعني بأن المجموعة B هي مجموعةٌ أم للمجموعة A و أن المجموعة B تحوي المجموعة. A

تحدثنا سابقاً عن الحالة التي يكون لدينا فيها مجموعةٌ كبرى (مثل مجموعة أيام الأسبوع) و مجموعة صغرى تكون موجودةً ضمن تلك المجموعة الكبرى (مجموعة أيام العطلة الأسبوعية. (
و لكن يمكن أن تكون لدينا مجموعتين تحويان العناصر ذاتها كما في المثال التالي:
س= (نور , سامر , عمر(
ع= (عمر , سامر, نور(
و كما مر معنا سابقاً فإن ماهية كل مجموعة تتحدد وفقاً لماهية العناصر التي تحتويها , بمعنى أن عناصر المجموعة هي التي تحدد ماهية تلك المجموعة , و بما أن كلاً من المجموعتين السابقتين تحويان العناصر ذاتها بلا زيادة ولا نقصان , فإن هذا يعني ببساطة أن كلتا المجموعتين متساويتين.
و في الوقت ذاته فإننا نقول بأن كل مجموعة من هاتين المجموعتين هي مجموعةً جزئية من المجموعة الثانية وذلك لأن عناصر كلٍ من هاتين المجموعتين موجودة في المجموعة الأخرى.
إذا كان لدينا مجموعتين تحويان العناصر ذاتها فهذا يعني بأن هاتين المجموعتين متساويتين , و في الوقت ذاته فإن ذلك يعني بأن كلاً من هاتين المجموعتين هي مجموعةٌ جزئيةً من المجموعة الثانية لأن عناصر كلاً منهما موجودةً في المجموعة الأخرى.
و في هذا الشكل من أشكال العلاقة بين مجموعتين نستخدم الرمز ⊇ لدلالة على أن إحدى هاتين المجموعتين هي مجموعةٌ جزئية من المجموعة الثانية و أنها تساويها في الوقت ذاته , كما نستخدم الرمز ⊆ للدلالة على أن إحدى هاتين المجموعتين هي مجموعةٌ أم للمجموعة الثانية أي أنها تشمل المجموعة

الثانية و في الوقت ذاته فإنها تساويها.
س= (نور , سامر , عمر)
ع= (عمر , سامر, نور(
س=ع
س⊇ع : المجموعة س تساوي المجموعة ع كما انها مجموعةٌ جزئيةٌ منها.
ع⊇س : المجموعة ع تساوي المجموعة ع كما أنها مجموعةٌ أم تضم المجموعة س في الوقت ذاته.

كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها.
$B \subseteq B$
المجموعة B تساوي نفسها كما أنها مجموعةٌ جزئية من نفسها لأننا إذا تصورنا بأن هنالك نسخةً طبق الأصلِ منها فإنها بالطبع ستكون مساويةً لها و ستحوي العناصر ذاتها و بالتالي فإنها ستكون مجموعةً جزئيةً منها.
المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية من كل مجموعة : يعتبر الرياضيين بأن العدم موجودٌ في كل شيء و بالتالي فإنه جزءٌ من كل شيء.
■كل مجموعة هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U : على سبيل المثال فإن مجموعة سيارات المرسيدس هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة التي تضم جميع أصناف السيارات و مجموعة حيوانات المزرعة هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة التي تضم جميع حيوانات العالم.
إذا طلب منا أن نذكر المجموعات الجزئية التي تضمها مجموعةٌ ما فإننا دائماً نذكر المجموعة الخالية (لأن المجموعة الخالية هي جزءٌ من كل مجموعة) ثم نذكر اسم المجموعة ذاتها (لأن كل مجموعة هي مجموعةٌ جزئيةٌ من نفسها) , ثم نذكر بقية المجموعات الجزئية التي تضمها تلك المجموعة.
المجموعة A تساوي المجموعة B في حال كانت المجموعة A مجموعةً جزئية من المجموعة B و في حال كانت المجموعة B كذلك مجموعةً جزئية من المجموعة A في الوقت ذاته , و بالتالي تتحقق لدينا فكرة أن هاتين المجموعتين متساويتين , كما أن كلاً منهما هي مجموعةٌ جزئية من الأخرى:
A=Bفقط في حال كانت A⊇B : و كانت. A⊆ B
أي أن المجموعتين A و B هما مجموعتين متساويتين في حالةٍ واحدة وهي أن تكون المجموعة الأولى مجموعةً جزئية من المجموعة الثانية و أن تكون المجموعة الثانية مجموعةً جزئية من المجموعة الأولى , أي أن تكون كلاً من هاتين المجموعتين مجموعةً جزئيةً من المجموعة الثانية.
العلاقة المتعدية و المجموعات:
نعني بالعلاقة المتعدية أن تقيس شيئاً ثالثاً بطريقةٍ غير مباشرة بناءً على علاقته بشيءٍ ثاني تعرفه:
فإذا كان محمد بعمر سامر و كان سامر بعمر نور فهذا يعني بأن محمد بعمر نور و
إذا كان A صديقٌ لعدوك B الذي يظهر العداوة لك بشكلٍ صريح فهذا يعني بأن A هو عدوٌ لك كذلك و إن لم يظهر لك العداوة بشكلٍ صريح.
فإذا كان هنالك الطرف A الذي يدعي صداقتك بينما هو صديقٌ لعدوك B فهذا يعني ← بأن A الذي يدعي صداقتك ليس إلا عدوٌ لك.
و إذا عرفنا بأن A مثلاً هي مجموعةٌ جزئية من المجموعة B و أن المجموعة B هي بدورها مجموعةٌ جزئية من المجموعة C فهذا يعني بأن المجموعة A هي مجموعةٌ جزئية من المجموعة. C
فإذا كانت A مجموعةً جزئية من المجموعة: B
A⊆ B
و إذا كانت B مجموعةً جزئية من المجموعة: C
B⊆ C

فهذا يعني بأن المجموعة A هي كذلك مجموعةٌ جزئية من المجموعة: C
$A \subseteq C$

لا تتحقق المساواة بين مجموعتين إلا إذا كانت كلٌ منهما مجموعة جزئيةً من الأخرى و لذلك نقول بأن المجموعة A تساوي المجموعة : B A=B فقط في حال كانت هنالك علاقة تبادلية بين هاتين المجموعتين أي في حال كانت المجموعة A مجموعةً جزئيةً من المجموعة: B
$A \subseteq B$
و في حال كانت B كذلك مجموعةً جزئية من المجموعةA
$B \subseteq A$
مثال عملي:
لدينا المجموعة س التي تحوي العناصر:
س= (سامر , نور, عمر , مجد , محمد) و لدينا المجموعة ع التي تحوي العناصر:
ع= (سامر , نور, عمر, مجد , محمد(
إن كلاً من هاتين المجموعتين هي مجموعة جزئية من المجموعة الأخرى فالمجموعة س هي مجموعة جزئية من المجموعة ع و كذلك فإن المجموعة ع هي مجموعةٌ جزئية من المجموعة س , لماذا ؟
لأنهما تحويان العناصر ذاتها.
إن المجموعتين س و ع هما مجموعتين متساويتين , لماذا ؟
لأن كلاً منهما مجموعةٌ جزئية من المجموعة الأخرى.

■الآن ماذا لو كانت المجموعة الأولى مجموعةً جزئية من المجموعة الثانية و لكن لم تكن المجموعة الثانية مجموعةً جزئيةً من المجموعة الأولى:
ماذا لو كانت المجموعة A مجموعةً جزئيةً من المجموعة. B
$A \subseteq B$
و لكن المجموعة B لم تكن مجموعةً جزئيةً من المجموعة: A
$B \nsubseteq A$
في حال كانت إحدى المجموعتين فقط مجموعةً جزئيةً من المجموعة الثانية بينما لم تكن المجموعة الثانية مجموعةً جزئيةً من المجموعة الأولى فهذا يعني بأن هاتين المجموعتين ليستا مجموعتين متساويتين و عندها نقول بأن المجموعة A هي مجموعةٌ جزئيةٌ حقيقية Proper subset من المجموعة B , و نعبر عن هذه العلاقة بالشكل التالي:
$A \subset B$
إن الرمز ⊇ يتضمن معنى ان تكون مجموعة جزئية من مجموعةٍ ما و يتضمن معنى المساواة كذلك بمعنى أنه يعني أن كلاً من المجموعتين هما مجموعتين جزئيتين من بعضهما البعض لأنهما تتضمنان العناصر ذاتها , أما الرمز ⊃ فيحمل معنى أن إحدى المجموعتين فقط هي مجموعةٌ جزئية من المجموعة الثانية بينما المجموعة الثانية هي مجموعة أم تتضمن المجموعة الأولى , أي أنهما ليستا مجموعتين متساويتين لأن إحداهما مجموعةٌ كبرى بينما الثانية مجموعةٌ صغرى.
مثالٌ توضيحي:
المجموعة ح تتضمن عدداً من الحيوانات اللاحمة:
ح = (قطة , كلب, فهد, نمر , ذئب, ثعلب, ضبع(
المجموعة م تتضمن الحيوانات الأليفة اللاحمة:
م= (قطة , كلب(

في المثال السابق المجموعة (م) أي مجموعة الحيوانات الأليفة اللاحمة هي مجموعةٌ جزئية من المجموعة (ح) أي مجموعة الحيوانات اللاحمة , و لكن المجموعة ح ليست مجموعةً جزئيةً من المجموعة م و سبب ذلك أن المجموعتين ليستا مجموعتين متساويتين ذلك أنهما لا تحويان العدد ذاته من العناصر ولذلك نقول بأن المجموعة م هي مجموعة جزئية حقيقية من المجموعة ح:
⊂ح م

مخطط فن: Venn diagram -
ينسب مخطط فن إلى الإنكليزي جون فن John Venn (1834-1923) يستخدم مخطط فن في فرع الرياضيات الذي يعرف بنظرية المجموعات set theory و ذلك لإظهار العلاقة بين المجموعات و العناصر ـ يتم تمثيل مخطط فن على شكل دوائر تتوضع بعضها ضمن الدوائر الأخرى لتمثيل المجموعات الجزئية التي تتوضع داخل مجموعاتٍ أم حيث تمثل الدائرة الكبيرة المجموعة الأم بينما تمثل الدائرة الصغيرة التي تتوضع داخل الدائرة الكبيرة ُالمجموعة الجزئية ـ مثال:
يمكننا أن نصور مثال الحيوانات اللاحمة و الحيوانات اللاحمة الأليفة وفق مخطط فن بأن نرسم دائرة كبيرة نكتب داخلها أسماء الحيوانات اللاحمة ثم نحيط اسماء الحيوانات اللاحمة الأليفة (القطة و الكلب) بدائرة صغيرة فنحصل بذلك على دائرة صغيرة تمثل المجموعة الجزئية تقع ضمن الدائرة الكبيرة التي تمثل الحيوانات اللاحمة.
كما يتم تصوير علاقة المجموعات ببعضها البعض وفق مخطط فن على شكل دائرتين أو أكثر متداخلتين بشكلٍ جزئي (كما تتداخل الدوائر التي ترمز للألعاب الأولمبية) حيث تمثل وتحوي الأجزاء المتداخلة العناصر المشتركة بين المجموعات المختلفة.
فإذا كان سامر و عمر تلميذين في الصف و كانا كذلك لا عبين في فريق رياضي فإن العنصرين المشتركين بين مجموعة تلاميذ الصف و بين مجموعة لاعبي الفريق الرياضي هما سامر و عمر و بالتالي إذا مثلنا ذلك الأمر و فق مخطط فن فإننا نرسم دائرتين متداخلتين الأولى نكتب فيها أسماء تلاميذ الصف بينما نكتب في الثانية أسماء لا عبي الفريق الرياضي و داخل القطاع المشترك intersection بين هاتين الدائرتين نكتب اسمي سامر و عمر.
يتم تمثيل المجموعة الكونية (المجموعة الشاملة universal set (و فق مخطط فن على شكل مستطيل.
Venn diagram
اتحاد مجموعتين: **The union of two sets**
اتحاد مجموعتين هو مجموعةٌ جديدة تحوي جميع العناصر التي تنتمي إلى واحدة من المجموعتين المتحدتين على الأقل.
يرمز لاتحاد مجموعتين بالرمز: U
A U B
المجموعة **A** اتحاد المجموعة. **B**
تقاطع مجموعتين **The intersection of two sets** هو مجموعةٌ جديدة تحوي جميع العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين.
يرمز لتقاطع مجموعتين بالرمز. ∩
A ∩B
Aتقاطع**B**
ما يعبر أحياناً عن التقاطع بعبارة:
A and B
Aو**B**

مثال توضيحي:
لتكن لدينا المجموعتين A و. B
A=(1,2,3,4)
B=(4,5,6,7,8)
ما هو تقاطع هاتين المجموعتين مع بعضهما البعض؟
أي ما هو العنصر المشترك أو ماهي العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين ؟
بالطبع فإن العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين هو العدد 4 و لذلك نقول بأن تقاطع المجموعة A مع المجموعة B يعطينا مجموعة ثالثة هي المجموعة AB وهذه المجموعة تحوي العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين.
A∩B⟶ AB=(4)
في علم المجموعات لا يذكر العنصر الواحد إلا مرةً واحدة فقط , مع أن العدد 4 موجود في كلا المجموعتين فإننا ذكرناه مرةً واحدة.
الان ما هي نتيجة اجتماع أو اتحاد هاتين المجموعتين مع بعضهما البعض ؟
إنها مجموعة جديدة تحوي جميع العناصر الموجودة في كلتا هاتين المجموعتين.
AUB=(1,2,3,4,5,6,7,8)
اتحاد المجموعة A مع المجموعة B يعطينا مجموعةً ثالثة تحوي جميع العناصر الموجودة في كلتا هاتين المجموعتين.

مثال توضيحي:
لتكن لدينا المجموعة ص التي تحوي تلاميذ الصف:
ص= (سامر, نور, عمر, مجد , محمد , طارق, خالد, يوسف(
و لتكن لدينا المجموعة ر التي تحوي الفريق الرياضي للمدرسة:
ر = (سامر , نور , عبيدة, يزن , أسامة(
ما هو تقاطع المجموعة ص مع المجموعة ر ؟
إنه العناصر المشتركة بين المجموعتين أي سامر و نور فنقول:
ص ∩ ر = (ص ر) = (سامر , نور(
تقاطع المجموعة ص مع المجموعة ر يعطينا المجموعة المشتركة (ص ر) و التي تتألف من العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين أي سامر و نور.
ما هي نتيجة اتحاد المجموعتين ص و ر مع بعضهما البعض ؟
إن نتيجة اتحاد هاتين المجموعتين هو مجموعةً ثالثة تحوي جميع عناصر هاتين المجموعتين.
ص uر = (سامر, نور, عمر, مجد , محمد , طارق, خالد, يوسف , عبيدة, يزن , أسامة(
تقاطع المجموعة ص مع المجموعة ر هو مجموع العناصر الموجودة في كلتا هاتين المجموعتين.
في علم المجموعات لا نكرر ذكر العنصر أكثر من مرة واحدة ومن الخطأ أن تكرر ذكر العنصر الواحد أكثر من مرةٍ واحدة(
■إذا اختلط عليك الأمر في الامتحان ما بين رمز الاتحاد و رمز التقاطع تذكر دائماً بأن رمز الاتحاد هو حرف U كبير وهو الحرف الأول من كلمة(Union اتحاد.)

رمز التقاطع Intersection هو حرف U مقلوب رأساً على عقب. ∩ upside down

الصيغة الرياضية لاتحاد مجموعتين:

$AUB=(x:x \in A \text{ or } x \in B)$

إن اتحاد المجموعتين A و B يساوي مجموعة العناصر X التي تحقق الشرط أنها تنتمي إلى المجموعة Aأو انها تنتمي إلى المجموعة. B

أي أن ناتج اتحاد المجموعتين A و B مع بعضهما البعض هو مجموعة تضم عناصر x تحقق الشرط أنها إما أن تنتمي إلى المجموعة A أو أن تنتمي إلى المجموعة. B

مثال عملي:

عندما اتحدت المانيا الشرقية مع ألمانيا الغربية كان ناتج ذلك الاتحاد مجموعة (دولة) يحقق عناصرها x)مواطنوها (شرط انهم إما أنهم كانوا ينتمون إلى ألمانيا الشرقية (المجموعة الأولى) أو أنهم كانوا ينتمون إلى ألمانيا الغربية (المجموعة الثانية) – أي أنك إذا نزلت إلى شوارع ألمانيا بعد أن حققت الاتحاد بين شطريها فإنك ستجد سكاناً بعضهم شرقيين و بعضهم غربيين.

الصيغة الرياضية لتقاطع مجموعتين:

$A \cap B=(x:x \in A \ \& x \in B)$

إن تقاطع المجموعة A مع المجموعة B يساوي أو ينتج المجموعة التي تحوي العنصر مجموع العناصر xو التي تحقق الشرط أنها تنتمي لكلٍ من المجموعة A و المجموعة B على حدٍ سواء.

ينتمي$\in$

:بحيث أن ـ يحقق الشرط

AND و&

أي ان تقاطع مجموعتين هو المجموعة التي تحوي العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين و العنصر الذي لا يحقق شرط الانتماء لكلتا المجموعتين المتقاطعتين لا يمكن أن يكون ضمن ناتج تقاطع تلك المجموعتين.

مثال عملي:

ما هو ناتج تقاطع أرمينية مع لبنان ؟

إن ناتج تقاطع أرمينية (المجموعة الأولى) مع لبنان (المجموعة الثانية) هي المجموعة التي تحوي العنصر أو مجموع العناصر x و التي تحقق الشرط انها تنتمي لكلٍ من المجموعة الأولى (أرمينية) و المجموعة الثانية (لبنان) أي أن ناتج ذلك التقاطع هو الجالية الأرمنية في لبنان.

تذكر دائماً أن تقاطع خطين هو النقطة المشتركة التي يلتقي فيها هذين الخطين.

إذا كان ناتج تقاطع مجموعتين هو المجموعة الخالية بمعنى انه إذا كان ناتج تقاطع مجموعتين هو الصفر أي أنه لم تكن هنالك أية عناصر مشتركة بينهما فهذا يعني بأن هاتين المجموعتين هما مجموعتين منفصلتين عن بعضهما البعض على مخطط فن أي أننا إذا قمنا برسم مجموعتين لا توجد عناصر مشتركة بينهما فإننا نقوم برسمهما على شكل دائرتين بعيدتين عن بعضهما البعض و نعبر رياضياً عن المجموعتين التين لا توجد عناصر مشتركة بينهما بالصيغة التالية:

$A \cap B=\Phi$

رمز التقاطع$\cap$

Φالمجموعة الخالية (العدم) أو الصفر.

إذا كان:

$AUB=A ,A \cap B=A \longrightarrow A \subseteq B$

إذا كانت نتيجة اتحاد المجموعة A مع المجموعة B هي المجموعة A و إذا كان ناتج تقاطع المجموعة

Aمع المجموعة B هو المجموعة A فهذا يعني بأن المجموعة A هي مجموعة جزئية مساوية للمجموعة. B
مثال توضيحي:
A=(1,2,3)
B=(1,2,3)
AUB=(1,2,3)
إذا كانت المجموعة A تحوي العناصر (1,2,3) و كانت المجموعة B تحوي العناصر (1,2,3) فإن اتحاد المجموعتين A و B يعطي المجموعة. A
لماذا:
(1,2,3)+(1,2,3) =(1,2,3)
و ليس (1,1,2,2,3,3(
لأنه في علم المجموعات لا يجوز أبداً أن نكرر ذكر عنصر ما في مجموعة واحدة.
الآن إذا كان اتحاد المجموعة A مع المجموعة B هو المجموعة A فهذا يعني بأن المجموعة B لا تحوي أي عنصر غير موجود في المجموعة A , بمعنى أنه إذا كانت المجموعة A تحوي العناصر (مجد , نور) و أجرينا اتحاد بينها و بين المجموعة B و كانت نتيجة ذلك الاتحاد (مجد, نور) كذلك , أي المجموعة A ذاتها فهذا يعني بأن المجموعة B لا تحوي أي عنصرٍ غير موجود في المجموعة A , فلو كانت المجموعة B تحوي العناصر (مجد, نور , سامر) لكانت نتيجة اتحادها مع المجموعة A (مجد, نور , سامر) أي لكان هنالك عنصرٌ زائد وهو العنصر سامر و عندها لا يمكننا القول بأن اتحاد المجموعة A مع المجموعة B يعطي المجموعة. A
و لكن من الممكن أن تكون المجموعة B أقل من المجموعة A , فلو كانت المجموعة B تحوي عنصراً واحداً هو العنصر نور لكانت نتيجة اتحادها مع المجموعة A مساوية للمجموعة: A
)مجد , نور) + (نور) = (مجد, نور(
لا يذكر أي عنصر إلا مرة واحدة في المجموعة فلا يجوز أن نقول (مجد, نور, نور. (
النتيجة التي توصلنا إليها حتى الآن هي أنه من الممكن أن تكون المجموعة B مساوية للمجموعة A أو أصغر منها , ولكن لاستبعاد احتمال أن تكون المجموعة B أصغر من المجموعة A فقد ورد في الصيغة السابقة أن تقاطع المجموعة A مع المجموعة B هو المجموعة. A
A∩B=A
فلو كانت المجموعة B تحوي عنصراً واحداً هو العنصر مجد فقط لما كانت نتيجة تقاطعها مع المجموعة Aمساوية للمجموعة: A
)نور, مجد) ∩ (مجد) = (مجد(
)نور , مجد) تقاطع(مجد) = (مجد) , ذلك أن مجد هو العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين , و لكنه بما انه قال لنا بأن تقاطع المجموعتين A و B مع بعضهما البعض يساوي المجموعة A فهذا يعني بأن جميع عناصر المجموعتين هي عناصر مشتركة بينهما أي أن المجموعتين تحويان العناصر ذاتها.
)نور, مجد) تقاطع (نور, مجد) = (نور, مجد(
)نور, مجد) ∩ (نور , مجد) = (نور , مجد(
A∩B=A
و هذا يعني في النهاية بأن المجموعة A مجموعة جزئية مساوية للمجموعة. B
A⊆B

ذكرت سابقاً بأن كل مجموعة تنتمي إلى مجموعة شاملة تضم كل العناصر التي تتسم بذات صفات عناصر المجموعة , على سبيل المثال فإن مجموعة تلاميذ مدرسة معينة تنتمي إلى مجموعة شاملة تضم كل تلاميذ العالم و مجموعة الرياضيين في نادي رياضي معين تنتمي إلى مجموعة شاملة تضم كل رياضيي العالم و مجموعة الحيوانات في حديقة حيوانات معينة تنتمي إلى مجموعة شاملةً تضم كل حيوانات العالم و مجموعة النباتات الموجودة في حديقة ما تنتمي في النهاية إلى مجموعة شاملة تضم كل نباتات العالم.

المتممات المطلقة: absolute complements

يرمز للمتمم المطلق بحرف A مرفوع للقوة c على الشكل التاليAc :

المتممات المطلقة للمجموعة الشاملة هي المجموعة الخالية:

'U=Ø

لماذا ؟ لأنه لا توجد أية عناصر خارج المجموعة الشاملة -كل العناصر تنتمي للمجموعة الشاملة.

ما هي المتممات المطلقة للمجموعة الغالية ؟

المتمم المطلق للمجموعة الخالية هو المجموعة الشاملة ؟

Ø=U

لماذا ؟

لأن المجموعة الخالية لا تحوي أية عناصر و بالتالي فإن جميع العناصر تقع خارجها و تنقصها إذا أردنا أن نتمم المجموعة الخالية بحيث تضم داخلها جميع العناصر فهذا يعني بأنه يتوجب علينا أن نضم إليها جميع العناصر , و انتم تعلمون بأن جميع العناصر تنتمي إلى المجموعة الشاملة و بالتالي فإن المجموعة الشاملة هي متمم المجموعة الخالية.

تصور لو كان هنالك شخصين أحدهما ثري يمتلك كل شيء بينما الآخر فقير لا يمتلك أي شيء فإذا أردنا أن نعطي الشخص الفقير (المجموعة الخالية) كل ما ينقصه فإن علينا أن نعطيه ثروة الشخص الغني (المجموعة الشاملة) , و إذا بحثنا عما ينقص الشخص الثري من ثروة (المجموعة الشاملة) فإننا نجد بأنه لا ينقصه شيء , أي أن ما ينقصه هو اللا شيء أو العدم أو المجموعة الخالية Ø (ما يمتلكه الشخص الفقير.(

في علم المجموعات فإن متمم المجموعة A هو جميع العناصر التي لا توجد في المجموعة. A

إن المتمم المطلق للمجموعة A هو جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U و الغير موجودة في المجموعة. A

التعريف الرياضي للمتمم المطلق:

AC=(x:x ∈U ,x∉A)

إن المتمم المطلق للمجموعة Ac هو العنصر أو مجموع العناصر x التي تحقق الشرط أنها تنتمي إلى المجموعة الشاملة U وأنها لا تنتمي للمجموعة. A

: ACالمتمم المطلق للمجموعة. A

:بحيث ان , على اعتبار أن.

∉لا ينتمي.

المكمل المطلق لمجموعةً ما هو العنصر أو مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة الشاملة و لا تنتمي لتلك المجموعة.

لنفترض بأنك تهوى جمع الطوابع البريدية أو أنك تهوى جمع العملات القديمة و بالطبع ستكون لديك مجموعة طوابع بريدية أو مجموعة عملاتٍ قديمة و يمكن أن ندعو مجموعتك تلك بالمجموعة A مثلاً و

من الطبيعي أن تكون مجموعة الطوابع التي تمتلكها أنت مجموعةً ناقصة و محدودة ـ إن مجموعة الطوابع أو مجموعة العملات القديمة الكاملة التي تضم جميع طوابع العالم أو جميع عملات العالم القديمة تدعى بالمجموعة الشاملة. U
ماهي كمية الطوابع أو العملات القديمة التي تحتاجها حتى تكتمل مجموعتك من الطوابع أو العملات القديمة ؟
إنها بالطبع جميع الطوابع أو جميع العملات القديمة التي لا تضمها مجموعتك.
كما أنها في الوقت ذاته الطوابع أو العملات التي تنتمي إلى المجموعة الشاملة U التي تضم جميع الطوابع أو جميع العملات القديمة.
و هذا يعني بأن ما تحتاجه لإكمال مجموعتك موجودٌ في المجموعة الشاملة U و غير موجودٍ في مجموعتك , A و هذا المقدار الناقص و الذي يكفي لإتمام النقص في مجموعتك هو ما يدعى بالمتمم المطلق للمجموعة. AC

المتمم النسبي The relative complement أو فرق مجموعتين:difference of sets
المتمم النسبي للمجموعة أو فرق المجموعتين A و B هو جميع العناصر الموجودة في المجموعة A و الغير موجودة في المجموعة. B
A-B
و ببساطة فإن المتمم النسبي هو الفرق بين مجموعتين أو أنه ببساطة أشد حاصل طرح مجموعة من المجموعة الأخرى.
يرمز للفرق بين مجموعتين بخطٍ مائل. \
التعريف الرياضي للمتمم النسبي:
A\B=(x:x∈A,x∉B)
فرق \ المجموعتين A و B أو الفرق بين المجموعتين A و B أو A فرق B يساوي العنصر أو مجموعة العناصر x التي تحقق الشرط : أنها تنتمي للمجموعة A و أنها لا تنتمي للمجموعة. B
\فرق
:بحيث , أو التي تحقق الشرط
∈تنتمي
,و
∉لا تنتمي.
المتمم النسبي أو الفرق بين مجموعتين هو العنصر أو مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة الأولى ولا تنتمي للمجموعة الثانية.
نقرأ علاقة الفرق بين مجموعتين A A\B فرق B أو A ناقص. B
مثال توضيحي:
A=(S,D,F,G,H,J)
B=(D,F,G,H,J)
A\B=(S)
Aفرق B أو A ناقص B يساوي العنصر S لأنه العنصر الموجود في المجموعة A و الغير موجود في المجموعة. B
A\B=A-B
الفرق عملية طرح اعتيادية.
دعي المتمم النسبي بهذا الاسم تمييزاً له عن المتمم المطلق لأنه يختص بالنقص الموجود في مجموعةٍ

ما بالنسبة لمجموعةٍ ثانية و ليس بالنسبة للمجموعة الشاملة و لو عدنا لمثال مجموعة الطوابع البريدية فلو كانت لديك مجموعة طوابع و لتكن A و كان لدى صديقك مجموعة طوابع B فإن المتمم النسبي يختص فقط بالطوابع الموجودة في مجموعتك و الغير موجودة في مجموعة صديقك , أي الطابع أو مجموعة الطوابع التي تنقص مجموعة صديقك حتى تصبح مماثلةً لمجموعتك, أي أن المتمم النسبي يبحث في النقص الموجود في مجموعةٍ ما بالنسبة لمجموعةٍ أخرى غير المجموعة الشاملة.

الفرق المتناظر: ⊕ Symmetric difference

راينا سابقاً بأن فرق مجموعتين هو العنصر أو العناصر التي تنتمي للمجموعة الأولى و التي لا تنتمي للمجموعة الثانية -أي العناصر التي توجد في المجموعة الأولى و لا توجد في المجموعة الثانية.
و لكن هنالك مفهومٌ أكثر شمولاً من مفهوم الفرق بين مجموعتين و أكثر شمولاً من مفهوم المتمم النسبي حيث يتناول هذا المفهوم مجموعة العناصر التي توجد في مجموعة واحدة من المجموعتين ولا توجد في الأخرى.
الفرق المتناظر بين مجموعتين هو مجموع العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين فقط و ليس إلى كليهما.
نرمز للفرق المتناظر بدائرة تحوي خطين متعامدين. ⊕

الصيغة الرياضية للفرق المتناظر:

$A\oplus B=(A\cup B)\backslash\backslash(A\cap B)$

إن الفرق المتناظر ⊕ بين المجموعتين A و B يساوي اتحاد المجموعة A مع المجموعة B فرق تقاطع ∩ المجموعة A مع المجموعة. B

⊕الفرق المتناظر
Uاتحاد.
/فرق.
∩تقاطع.

إن الفرق المتناظر بين مجموعتين يساوي حاصل جمع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية ناقص تقاطع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية.
مثال توضيحي:
لتكن لدينا المجموعة س و تحوي العناصر:
س= (سامر, نور, محمد, طارق, عمر , نجم(
ولتكن لدينا المجموعة م و تحوي العناصر:
م = (طارق, عمر, نجم , مجد, عبيدة, يزن(
ما هو الفرق المتناظر بين المجموعتين م و س ؟
قلنا بأن الفرق المتناظر ⊕بين مجموعتين هو حاصل جمع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية أي اتحاد U المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية:
م U س = (سامر ,نور, محمد , طارق , عمر , نجم , مجد , عبيدة, يزن(
م U س = م+س
تذكر دائماً بأننا في علم المجموعات لا نذكر أي عنصر أكثر من مرةٍ واحدة فعندما نجمع مجموعتين مع بعضهما البعض فإن أي عنصرٍ موجود في المجموعتين نذكره مرةً واحدةً فقط.
نتابع حساب الفرق المتناظر للمجموعتين:

إن الفرق المتناظر ⊕ بين المجموعتين A و B يساوي اتحاد المجموعة A مع المجموعة B فرق تقاطع ∩ المجموعة A مع المجموعة. B
الآن علينا أن نجد تقاطع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية ومن ثم نقوم بطرحه من حاصل اتحاد المجموعتين مع بعضهما البعض:
تقاطع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية:
∩س= م
تعلمون بأن تقاطع مجموعتين مع بعضهما البعض هو العناصر المشتركة بينهما -ماهي العناصر المشتركة بين المجموعتين م و س ؟
س= (سامر, نور, محمد, طارق, عمر , نجم(
م = (طارق, عمر, نجم , مجد, عبيدة, يزن(
م∩س= (طارق , عمر, نجم(
تقاطع المجموعة م مع المجموعة س =(طارق , عمر, نجم) لأنها عناصر مشتركة بين المجموعتين.
الآن نأتي إلى الخطوة الثالثة و الأخيرة في إيجاد الفرق المتناظر ⊕ بين مجموعتين و تتمثل في إيجاد فرق اتحاد المجوعتين من فرق تقاطعهما : أي طرح حاصل جمع المجموعتين من نتيجة تقاطعهما.
الآن:
اتحاد U المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية:
م U س = (سامر ,نور, محمد , طارق , عمر , نجم , مجد , عبيدة, يزن(
م U س = م+س
وتقاطع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية:
م∩س=
م∩س= (طارق , عمر, نجم(
تقاطع المجموعة م مع المجموعة س =(طارق , عمر, نجم) لأنها عناصر مشتركة بين المجموعتين.
فرق اتحاد المجوعتين من فرق تقاطعهما : أي طرح حاصل جمع المجموعتين من نتيجة تقاطعهما.
فقط نتذكر تعريف الفرق بين مجموعتين:
فرق \ المجموعتين A و B أو الفرق بين المجموعتين A و B أو A فرق B يساوي العنصر أو مجموعة العناصر x التي تحقق الشرط : أنها تنتمي للمجموعة A و أنها لا تنتمي للمجموعة. B
)سامر ,نور, محمد , طارق , عمر , نجم , مجد , عبيدة, يزن)\((طارق , عمر, نجم= (
)سامر, نور, محمد, مجد عبيدة , يزن. (
هل هذه النتيجة صحيحة ؟
نتذكر تعريف الفرق المتناظر
إنه مجموعة العناصر التي توجد في مجموعة واحدة من المجموعتين ولا توجد في الأخرى.
هل ينطبق هذا التعريف على النتيجة التي وصلنا إليها ؟
هل ينتمي أي عنصرٍ في النتيجة التي توصلنا إليها إلى كلتا المجموعتين ؟
النتيجة التي توصلناً إليها:
)سامر, نور, محمد, مجد عبيدة , يزن(
عناصر المجموعتين:
س= (سامر, نور, محمد, طارق, عمر , نجم(
م = (طارق, عمر, نجم , مجد, عبيدة, يزن(
إذاً النتيجة صحيحة لأنه لا يوجد أي عنصرٍ من عناصر النتيجة التي توصلنا إليها ينتمي إلى كلتا المجموعتين.

■طريقة ثانية لحساب الفرق المتناظر ⊕ بين مجموعتين:
و هذه الطريقة أكثر بساطة:
$A \oplus B=(A \setminus B)U(B \setminus A)$
إن الفرق التناظري ⊕ بين المجموعتين A و B يساوي اتحاد أو مجموع A فرق B مع B فرق A.
فإذا كانت لدينا المجموعتين:
A=(QM,W,E,R,T,Y,U)
B=(T,Y,U,I,O,P)
فإن الفرق التناظري ⊕ لهاتين المجموعتين يساوي:
A∕B
AفرقB
A∕B=(Q,M,W,E,R)
BفرقA
B∕A=(I,O,P)

$(A \setminus B)U(B \setminus A)$
اتحاد A فرق B مع B فرقA
أي ناتج جمع A فرق B مع B فرق , A أي:
(Q,M,W,E,R,I,O,P)
نتذكر تعريف الفرق التناظري لمجموعتين بأنه مجموع العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين فقط و ليس إلى كليهما.
لدينا النتيجة التي حصلنا عليها وهي (Q,M,W,E,R,I,O,P) : و لدينا عناصر المجموعتين:
A=(QM,W,E,R,T,Y,U)
B=(T,Y,U,I,O,P)
هل تحقق النتيجة التي حصلنا عليها الشرط بأنها تنتمي إلى إحدى المجموعتين فقط ؟
إذا النتيجة صحيحة.

■كيف حسبنا الفرق التناظري و فق الطريقة الثانية ؟
قلنا بأن الفرق التناظري لمجموعتين هو مجموع العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين فقط و ليس إلى كليهما.
ولذلك فإننا ببساطة قمنا بإيجاد فرق المجموعة الأولى من المجموعة الثانية , أي أننا قمنا بإيجاد العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى ولا تنتمي إلى المجموعة الثانية ومن ثم قمنا بإيجاد فرق المجموعة الثانية من المجموعة الأولي أي أننا قمنا بإيجاد العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الثانية و لا تنتمي إلى المجموعة الثانية و بعد ذلك قمنا بجمع هاتين النتيجتين مع بعضهما البعض فحصلنا على العناصر التي تنتمي إلى مجموعةٍ واحدةٍ فقط من كلتا المجموعتين.
و بناء على ما سبق فإننا نستنتج بأن الفرق التناظري ⊕ لمجموعتين هو عملية فرق مضاعفة.

جبر المجموعات: Algebra od Sets
قانون الثبات : Idempotent الثبات في الرياضيات يتعلق بالمقادير الرياضية التي عندما تتم معاملتها مع نفسها فإنها تساوي نفسها , أي أن النتيجة تكون تلك المقادير ذاتها.
و هنالك عددين حقيقيين وحيدين يمتلكان ميزة الثبات و هما الواحد و الصفر فعندما يضرب كل من هذين

العددين بنفسه فإن النتيجة تكون العدد نفسه:

$1\times1=1$

$0\times0=0$

وفي علم المجموعات نصادف كثيراً ميزة الثبات كما هي الحال في الأمثلة التالية:

$AUA=A$

اتحاد المجموعة A مع المجموعةA يساويA

لنتحقق من هذا الأمر:

س = (نور, سامر, مجد)

س U س = (نور, سامر , مجد)

اتحاد س مع س = (نور, سامر, مجد)

أي س + س = (نور, سامر , مجد)

لماذا بقيت المجموعة على حالها عندما جمعناها مع نفسها ؟

لأنه في علم المجموعات لا يذكر العنصر الواحد إلا مرةً واحدة حتى لو تكرر مليار مرة.

مثال آخر عن الثبات أو الرسوخ فيعلم المجموعات:

$A\cap A=A$

المجموعة A تقاطع المجموعة A يساوي المجموعة. A

تعلمون طبعاً بأن تقاطع مجموعتين هو العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين.

لماذا يساوي تقاطع المجموعة A مع المجموعة A المجموعة A ؟

لأن تقاطع المجموعة A مع المجموعة A , أي أن العناصر المشتركة بين المجموعة A و المجموعة A هي جميع العناصر الموجودة في المجموعة A , و بما أن المجموعة تتحدد وفقاً للعناصر المكونة لها فإن تقاطع المجموعة A مع المجموعة A هي كل المجموعة. A

مثال توضيحي:

س = (نور, سامر, مجد)

س ∩س= (نور, سامر, مجد)

س تقاطع س = (نور, سامر , مجد)

العناصر المشتركة ما بين المجموعة س و المجموعة س هي جميع عناصر المجموعة س أي كامل المجموعة س و لذلك فإن س تقاطع س تساوي س.

■الخاصية الترابطية (التجميعية associative (للعمليات على المجموعات:

يقصد بالخاصية التبديلية أو الخاصية الترابطية أن تغيير مواقع الأعداد الداخلة في عملية الجمع لا يؤثر في نتيجة تلك العملية:

$(5+2)+1 = 5+(2+1)$

و في علم المجموعات فإن:

$(AUB)UC=AU(BUC)$

اتحاد المجموعة A مع المجموعة B و اتحاد الناتج مع المجموعة C يساوي اتحاد المجموعة A مع ناتج اتحاد المجموعة B مع المجموعة. C

س = (نور, سامر, مجد)

ع= (عبيدة, نور, عمر)

ص= (محمد, عمر, مجد)

الآن اتحاد المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية أي س U ع = (نور, سامر, مجد, عبيدة , عمر(
اتحاد الناتج مع المجموعة = (محمد , عمر , مجد, نور, سامر, عبيدة , محمد(
هذه النتيجة يجب أن تساوي اتحاد المجموعة س مع ناتج اتحاد المجموعة ع مع المجموعة ص.
اتحاد المجموعة ع مع المجموعة ص = (عبيدة, نور, محمد , مجد, عمر(
اتحاد هذا الناتج مع المجموعة س = (نور , سامر, مجد , عبيدة, محمد , مجد, عمر(
النتيجة متطابقة.
اتحاد مجموعتين هو عملية جمع اعتيادية و لكن علينا الحذر من تكرار أي عنصر.

■مثالٌ آخر على الظاهرة التجميعية:
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة B تقاطع المجموعة C يساوي تقاطع المجموعة A مع ناتج تقاطع المجموعة B مع المجموعة C.
س = (نور, سامر, مجد(
ع= (عبيدة, نور, عمر(
ص= (محمد, عمر, مجد(
ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ع = (نور) تقاطع المجموعة ص Φ = المجموعة الخالية ـ لأنه ليست هنالك عناصر مشتركة يساوي:
تقاطع المجموعة س مع ناتج تقاطع المجموعة ع مع المجموعة ص.
ناتج تقاطع المجموعة ع مع المجموعة ص = (عمر(
ناتج تقاطع المجموعة ع مع المجموعة ص (عمر) تقاطع المجموعة س ϕ = المجموعة الخالية.
إذاً النتيجة صحيحة.

■الخاصية التوزيعية: distributive
مثال على الخاصية التوزيعية:
$4\times(2+3)=(2\times4)+(3\times4)$
20
$AU(B\cap C)=(AUB)\cap(AUC)$
اتحاد المجموعة A مع (ناتج تقاطع المجموعة B مع المجموعة C) يساوي اتحاد المجموعة A مع المجموعة B تقاطع اتحاد المجموعة A مع المجموعة C.
س = (نور, سامر(
ع= (نور, عمر(
ص= (محمد, مجد(
ناتج تقاطع المجموعة ع مع المجموعة ص ـأي العناصر المشتركة بينهما (Φ) = اتحاد المجموعة س = (نور, سامر(
تذكر النتيجة(نور , سامر(
اتحاد المجموعة س مع المجموعة ع = (نور, سامر, عمر) تقاطع اتحاد المجموعة س مع المجموعة ص :
اتحاد المجموعة س مع المجموعة ص = (نور, سامر, مجد , محمد) تقاطع اتحاد المجموعة س مع المجموعة ع = (نور, سامر, عمر(

(نور, سامر, مجد, محمد) تقاطع (نور, سامر , عمر) = (نور , سامر)
(نور , سامر) النتيجة صحيحة.

حالة توزيعية أخرى:
$A\cap(BUC)=(A\cap B)U(A\cap C)$
تقاطع المجموعة A مع ناتج اتحاد المجموعة B مع المجموعة C يساوي اتحاد ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة B مع ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة. C
س = (نور, سامر)
ع= (نور, عمر)
ص= (محمد, مجد)
تقاطع المجموعة A مع ناتج اتحاد المجموعة B مع المجموعة: C
ناتج اتحاد المجموعة ع مع المجموعة ص=
ع U ص = (نور, عمر, محمد, مجد)
(نور , عمر, محمد , مجد) تقاطع المجموعة س أي (نور , سامر) = (نور) لأن (نور) هو العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين.
نتيجة الحد الأول (نور) تذكر هذه النتيجة.
يساوي اتحاد ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة B مع ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة: C
ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ع = (نور)
ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ص = المجموعة الخالية (Φ) لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما.
الآن نحسب اتحاد ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ع مع ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ص:
(نور) = Ø U (نور)
اتحاد (نور) مع المجموعة الخالية يساوي (نور.)
لأن اتحاد أي مجموعة مع المجموعة الخالية يساوي تلك المجموعة.
النتيجة صحيحة.

■قوانين التماثل: Identity
$AU\emptyset=A$
اجتماع المجموعة A مع المجموعة الخالية يساوي المجموعة. A
كما نقول بأن:
$1+0=1$

$AU\ U = U$
اتحاد المجموعة A مع المجموعة الشاملة U = المجموعة الشاملة.
هل يمكن أن نقول هنا بأن اتحاد المجموعة A مع المجموعة الشاملة يساوي المجموعة الشاملة U + المجموعة A ؟
بالطبع لا يمكن ذلك لأن المجموعة A هي جزءٌ من المجموعة الشاملة , فإذا ذكرنا المجموعة الشاملة فهذا يعني ضمنياً أن المجموعة A و كل مجموعة أخرى معنية بالأمر , كما لو قلنا مثلاً بأن الدولار هو عملة

الولايات المتحدة و عملة ولاية كاليفورنيا , هذا الكلام لا معنى له لأن ولاية كاليفورنيا هي جزءٌ من الولايات المتحدة (حتى ساعة كتابة هذا البحث) , كما لو قلت كذلك بأنك زرت أوروبا كلها و زرت فرنسا لأن زيارتك لأوروبا كلها يعني ضمنياً بأنك زرت فرنسا.

$A \cap U = A$

تقاطع المجموعة A مع المجموعة الشاملة U يساوي المجموعة. A
أي أن الشيء المشترك ما بين المجموعة A و المجموعة الشاملة هو المجموعة. A
العنصر المشترك ما بين ولاية كاليفورنيا و بين الولايات المتحدة هو ولاية كاليفورنيا بمعنى أنك لو رسمت دائرتين تمثلان مجموعتين أسميت إداهما كاليفورنيا و أسميت الأخرى الولايات المتحدة و كتبت داخلها أسماء الولايات الأمريكية المختلفة و أردت أن تجد العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين فإنك سترسم خطاً يصل ما بين مجموعة كاليفورنيا و بين اسم ولاية كاليفورنيا الموجود في مجموعة الولايات المتحدة.

العنصر المشترك ما بين شهر رمضان و بين مجموعة أشهر السنة الهجرية هو شهر رمضان:
رمضان ---------------------------رمضان
شعبان
ذو القعدة
ذو الحجة
000

$A \cap \phi = \Phi$

تقاطع المجموعة A مع المجموعة الخالية ϕ يساوي المجموعة الخالية.
ما هو الشيء المشترك ما بين أي مجموعة و المجموعة الخالية ϕ ؟
إنه المجموعة الخالية , لماذا؟
لأن المجموعة الخالية هي جزءٌ من كل مجموعة , أي أنها موجودةٌ في كل مجموعة.
هذا الكلام حتى و إن لم يكن دقيقاً فإنه يساعدنا على تذكر القاعدة كما أنه يؤدي إلى نتيجة صحيحة.

■ **قانون الإكمال: Complement law**

$A \cup A^C = U$

اتحاد المجموعة A مع المتمم المطلق للمجموعةAc يساوي المجموعة الشاملة.
المتمم المطلق لمجموعةٍ ما هي مجموعة العناصر التي إذا أضيفت إلى مجموعةٍ ما فإنها تجعل منها مجموعةً شاملة , أي أن المتمم المطلق هو مجموعة العناصر التي تنقص مجموعةً ما حتى تكون مجموعةً شاملة.
و لو عدنا إلى مثال مجموعة الطوابع فإذا كانت لديك مجموعة طوابع و لتكن A فإن المكمل المطلق أو المتمم المطلق لمجموعة الطوابع التي تمتلكها AC هو جميع الطوابع التي تنقص مجموعتك حتى تصبح مجموعةً شاملةً تضم جميع الطوابع الموجودة في العالم.
و لهذا السبب فإن:
المجموعة + المكمل المطلق لهذه المجموعة = المجموعة الشاملة.

■ **قانون الإكمال الثاني:**

$U^C = \phi$

المكمل المطلق للمجموعة الشاملة هو المجموعة الخالية.
Uالمجموعة الشاملة.
Ucالمكمل المطلق للمجموعة الشاملة.
Φالمجموعة الخالية.

لماذا المكمل المطلق للمجموعة الشاملة هو المجموعة الخالية ؟
لأنه يشترط في المجموعة الشاملة أن تكون مجموعةً كاملة لا ينقصها أي عنصر و إذا نقصت المجموعة الشاملة و لو عنصراً واحداً فإنها لا تكون مجموعةً شاملة وبالتالي فإن المجموعة الشاملة لا ينقصها أي عنصر و لذلك فإن ما ينقص المجموعة الشاملة هو العدم أو اللاشيء أو الصفر أو بلغة علم المجموعات هو المجموعة الخالية , أي أن المكمل المطلق للمجموعة الشاملة حتى تصبح مجموعة شاملة هو المجموعة الخالية.
■قانون الإكمال الثالث:

ΦC=U
المكمل المطلق للمجموعة الخالية هو المجموعة الشاملة.
المجموعة الخالية هي الصفر أو العدم فما الذي ينقص المجموعة الخالية حتى تصبح مجموعةً شاملة تضم جميع العناصر ؟ إن الذي ينقصها حتى تصبح مجموعةً شاملة هو جميع العناصر , أي أن ما ينقصها هو المجموعة الشاملة.
ما الذي ينقص الصفر حتى يصبح مليار ؟ ينقص الصفر مليار حتى يصبح مليار.
ما الذي ينقص الصفر حتى يصبح مليون ؟ ينقص الصفر مليون حتى يصبح مليون.

■قوانين دي مورجان: De Morgan's laws
أوغوستوس دي مورجان: Augustus De Morgan رياضي إنكليزي ولد في العام 1806 إليه ينسب قانون دي مورجان و الذي يعرف أحياناً بثنائية دي مورجان. De Morgan duality

(AUB) ⟦^c⟧=A⟦^c⟧∩B⟦^█(c @)⟧

المتمم المطلق c لحاصل اتحاد المجموعة A مع المجموعة B يساوي المتمم المطلق للمجموعة AC تقاطع المتمم المطلق للمجموعة.Bc
إذا كان لكلٍ من المجموعتينA و B متممٌ مطلق مشترك فمن الطبيعي أن يكون ذلك المتمم المطلق المشترك مساوياً لتقاطع المكمل المطلق للمجموعة A مع المكمل المطلق للمجموعة. B
أولاً علينا أن نتذكر بعض الأمور:
المتمم المطلق C لمجموعةٍ ما هو مجموعة العناصر التي تنقص تلك المجموعة حتى تصبح مجموعةً شاملة U تضم كل العناصر.
تقاطع مجموعتين ∩ : هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما.
المجموعة الشاملة : هي المجموعة الكاملة التي تضم كل العناصر.
لنفترض بأن عدد الدجاج في العالم مليار دجاجة و أن هذه المليار دجاجة موجودة ضمن مجموعة تدعى بالمجموعة الشاملة , U أي أن هذه المجموعة الشاملة تضم مليار دجاجة .
و لنفترض بأنه كان لدينا مدجنتين فارغتين لا تحويان أية دجاجة المدجنة الأولى دعوناها بالمجموعة A بينما دعونا المدجنة الفارغة الثانية بالمجموعة. B

إذا اتحدت هاتين المدجنتين مع بعضهما البعض كم يلزمهما حتى تصبحا مجموعةً شاملة , أي ما هو المكمل المطلق لهما ؟
يلزمهما مليار دجاجة حتى تصبحا مجموعةً شاملة أي أن المتمم المطلق لهما هو مليار دجاجة على اعتبار أن عدد الدجاج في العالم هو مليار دجاجة أي أن المجموعة الشاملة U تضم مليار دجاجة.
الآن لو اعتبرنا كل مدجنة على حدة:
ما هو المتمم المطلق للمدجنة الأولى الخاوية (المجموعة A) ؟
أي كم يلزم المدجنة الأولى الخاوية (المجموعة A) حتى تصبح مجموعةً شاملة ؟
يلزمها مليار دجاجة حتى تصبح مجموعة شاملة.
ما هو المتمم المطلق للدجاجة السوداء؟
أي كم يلزم المدجنة الأولى الخاوية (المجموعة A) حتى تصبح مجموعةً شاملة؟
يلزمها مليار دجاجة حتى تصبح مجموعة شاملة.

ما هي نتيجة تقاطع المكمل المطلق للمدجنة الأولى مع المكمل المطلق للمدجنة الثانية ؟
أي ما هي العناصر المشتركة بين المكمل المطلق للمدجنة الأولى و بين المكمل المطلق للمدجنة الثانية ؟
إنها جميع الدجاجات أي المليار دجاجة.
لماذا لأن كل مدجنة من هاتين المدجنتين تحتاج إلى المليار دجاجة ذاتها حتى تصبح مجموعةً شاملة و هذا يعني بأن هذه المليار دجاجة (المكمل المطلق) بأكملها مشتركة بين هاتين المدجنتين أو المجموعتين.

المتمم المطلق c لحاصل اتحاد المجموعة A مع المجموعة B يساوي المتمم المطلق للمجموعة A تقاطع المتمم المطلق للمجموعة.B

■قانون دي مورجان الثاني:
(A∩B) 〚^C〛=A〚^C〛UB〚^C〛
إن نتيجة تقاطع ∩ المكمل المطلق C لكلٍ من المجموعة A مع المجموعة B يساوي اتحاد المكمل المطلق للمجموعة AC مع المكمل المطلق للمجموعة. BC
أولاً نتذكر معاني بعض المصطلحات:
المكمل المطلق أو المتمم المطلق C هو كل ما ينقص مجموعةً ما حتى تصبح مجموعةً شاملة , U أي مجموعةً تضم جميع العناصر.
نتيجة تقاطع مجموعتين ∩ : هي العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين.
الآن:
لنفترض بأن عدد التلاميذ في العالم هو مليار تلميذ بمعنى أن هؤلاء المليار تلميذ أو هؤلاء المليار عنصر يشكلون المجموعة الشاملة U التي تضم جميع العناصر , على اعتبار أنها تضم جميع تلاميذ العالم.
لنفترض بأنه كانت هنالك مدرسة خاوية ندعوها بالمجموعة. A
الآن ما هو المكمل المطلق حتى تصبح المدرسة الخاوية A مجموعةً شاملة تضم كل العناصر؟
المكمل المطلق لهذه المدرسة الخاوية هو مليار تلميذ (على فرض أن هذا هو عدد تلاميذ العالم.(
لنفترض بأنه كانت هنالك مدرسةٌ ثانية خاوية ندعوها بالمجموعة. B
ما هو المكمل المطلق لهذه المدرسة الثانية الخاوية (المجموعة B) حتى تصبح تلك المدرسة مجموعةً شاملة تضم كل العناصر؟
المكمل المطلق للمدرسة الثانية الخاوية (المجموعة B) حتى تصبح تلك المدرسة مجموعةً شاملة تضم كل العناصر هو مليار تلميذ.

إن نتيجة تقاطع ∩ المكمل المطلق C لكلٍ من المجموعة A مع المجموعة B يساوي اتحاد المكمل المطلق للمجموعة AC مع المكمل المطلق للمجموعة. BC
ما هي نتيجة تقاطع المكمل المطلق لكلٍ من المدرسة الأولى مع المدرسة الثانية ؟
أي ما هي العناصر المشتركة بين المكمل المطلق للمدرسة الأولى مع المكمل المطلق للمدرسة الثانية ؟
العناصر المشتركة بين المكملين هي جميع العناصر أي المليار تلميذ لأن كلتا هاتين المدرستين تحتاج إلى المليار تلميذ ذاتها حتى تصبح مجموعةً شاملة تضم كل العناصر (كل تلاميذ العالم.(
كم يبلغ اتحاد U المكمل المطلق للمجموعة الأولى مع المكمل المطلق للمجموعة الثانية؟
أي كم يبلغ ناتج جمع المكمل المطلق للمدرسة الأولى مع المكمل المطلق للمدرسة الثانية؟
المكمل المطلق للمدرسة الأولى يبلغ مليار تلميذ و المكمل المطلق للمدرسة الثانية يبلغ مليار تلميذ و الآن:
مليار تلميذ U مليار تلميذ = مليار تلميذ
مليار تلميذ + مليار تلميذ = مليار تلميذ , لماذا؟
لأننا في علم المجموعات لا نكرر ذكر أي عنصر .فنقول مثلاً:
سامر U سامر = سامر
اتحاد سامر مع سامر = سامر
إذاً:
إن نتيجة تقاطع ∩ المكمل المطلق C لكلٍ من المجموعة A مع المجموعة B يساوي اتحاد المكمل المطلق للمجموعة AC مع المكمل المطلق للمجموعة. BC

■المجموعة المحدودة – المجموعة المنتهية: Finite set
المجموعة المحدودة أو المجموعة المنتهية finite site هي المجموعة التي تحتوي عدداً محدوداً من العناصر و قابلاً للحصر و على سبيل المثال فإن المجموعة الخالية Ø هي مجموعةٌ محدودة و منتهية لأنها تحوي صفر عنصر ـ مجموعة الأعداد من واحد إلى عشرة هي مجموعة منتهية و محدودة و كذلك الحال بالنسبة إلى مجموعة المدرسة فهي مجموعة محدودة و منتهية لأنها تحوي عدداً محدوداً و قابلاً للعد و الحصر من التلاميذ (العناصر) و مجموعة أحرف الأبجدية لأنها تحوي عدداً محدوداً من العناصر (الأحرف(
المجموعة غير المحدودة و غير المنتهية infinite set هي المجموعة التي تحتوي على عددٍ غير محدود و غير قابلٍ للحصر من العناصر مثل مجموعة الأعداد {1, 2, ..., n} ,
لماذا نعتبر مجموعة الأعداد مجموعةً غير محدودة و غير منتهية ؟
لأنها غير قابلة للحصر فهل يوجد شخصٌ في العالم يستطيع أن يقول لنا ما هو أعلى رقم يمكن الوصول إليه و ليس بعده رقمٌ أكبر منه ؟
و الحال كذلك بالنسبة لمجموعة الأعداد الزوجية و مجموعة الأعداد الفردية فكلها مجموعات غير منتهية ولا يمكن حصر عناصرها برقمٍ معين.
و كقاعدة عامة فإن:
All finite sets are countable , but not all countable sets are finite.
جميع المجموعات المنتهية قابلة للعد و لكن ليست جميع المجموعات القابلة للعد منتهية.

يشار للمجموعات المنتهية بحرف n يوضع قرب اسم المجموعة.
حالة:
n(A)+n(B)=n(AUB)
n(A)+n(B)=n(AUB)

إذا كانت كلٌ من المجموعتينA و B مجموعتين منفصلتين منتهيتين و محدودتين فإن اتحاد المجموعة A مع المجموعة B هو كذلك مجموعةٌ منتهية.
المجموعات التي تكون محدودة عندما تكون منفصلة تبقى محدودة عند اتحادها مع مجموعات أخرى منتهية.

■قوة المجموعة: Power set

قوة المجموعة هي التعبير عن جميع الفئات الجزئية التي تتبع تلك المجموعة.

A Power Set is a set of all the subsets of a set.

يستخدم الرمز S للتعبير عن جميع العناصر و المجموعات الجزئية التي تتبع تلك المجموعة.
P(S) = Power set = قوة المجموعة
الحرفS هو اختصار لكلمة (مجموعة set (و نحن دائماً نكتبه كبيراً و بين قوسين.
دائماً يعبر عن قوة مجموعةٍ ما بعدد 2 مرفوع لقوةٍ معينة هي عدد عناصر تلك المجموعة و عدد مجموعاتها الجزئية فإذا كان لدينا مجموعة مؤلفة من سبعة عناصر فإننا نعبر عن قوة تلك المجموعة بعدد 2 مرفوع للقوة 7:
27
و في حال لم يتم تحديد قوة المجموعة , أي في حال لم يتم تحديد عدد عناصرها و مجموعاتها الجزئية فإننا عندها نعبر عن قوة تلك المجموعة بعدد 2 مرفوع للقوة. n
2n
بالطبع فإن الحرفn هو اختصار لكلمة(عدد) وهو يرمز لأي عددٍ كان..

كيف تعبر عن قوة مجموعة تتألف من ستة عناصر ؟
لتكن لدينا المجموعة (S) التي تتألف من ستة عناصر:
S=(1,2,3.4,5,6)
نقول بأن قوة هذه المجموعة تساوي:
P(S)=2n=26=64
قوة هذه المجموعة تساوي 64.
P(S) = power set = قوة المجموعة.

الدالة – التابعFunction

الدالة – التابعFunction

عندما تكون هنالك علاقة ما بين عنصر ما من مجموعةٍ ما و عنصرٍ آخر من مجموعةٍ ثانية فإننا نعبر عن تلك العلاقة بسهم يصل ما بين هذين العنصرين , و هذا السهم ينطلق من العنصر المصدر إلى العنصر الهدف.

المجموعة A المجموعةB
استراليا ---------------←كندا
المانيا ----------------←إنكلترا
الدنمارك --------------← فنلندا

نعبر عن الدوال أو التوابع Functions برمز معين , كما نعبر عن علاقة التابعية بين عنصرين بسهم ←
:
فإذا رمزنا لتابعٍ ما أو دالةٍ ما function تربط بين مجموعتين بالحرف f مثلاً فإننا نعبر عن علاقة التابعية بالشكل التالي:
f:A→B
الدالة أو التابع f على اعتبار أن هذه الدالة تربط ما بين A و B او أنه تابعٌ من A إلى B) مصدره A و هدفه. (B

تابعي السقف و الأرض: Ceiling and Floor Functions
)الحد الأدنى و الحد الأعلى(
إذا كان x عدداً حقيقياً فإنه لا بد واقعٌ بين عددين صحيحين أدنى و أعلى منه يسميان أرض و سقف , فالحد الأدنى للعدد x أو تابع الأرض لذلك العدد يشير إلى أكبر عددٍ صحيح لا يزيد عن العدد x , أما الحد الأعلى للعدد x أو تابع السقف للعدد x فإنه يشير إلى أقل عددٍ صحيح لا يقل عن العدد. x

الرياضيات خطوة بخطوة – المتواليات الهندسية – حساب الاحتمالات

■المتوالية الحسابية – المتوالية العددية: Arithmetic progression
المتوالية الحسابية أو المتوالية العددية هي عبارة عن سلسلة من الأعداد المتتابعة التي تتزايد أو تتناقص بشكلٍ ثابت.
مثال على المتوالية الحسابية أو المتوالية العددية:
عندما تعد من واحد لعشرة مثلاً أو من عشرة لمئة أو من واحد لألف أو عندما تعد بشكلٍ عكسي من مئة لواحد فإن سلاسل العداد تلك هي متواليات حسابية أو متوالياتٍ عددية لأنها تنقص أو تزداد بشكلٍ ثابت ذلك أن كل عددٍ في تلك السلسلة أو تلك المتوالية هو أكبر من العدد الذي يسبقه بعددٍ واحد كما أنه أصغر من العدد الذي يليه بعددٍ واحدٍ كذلك.

■المتوالية الهندسية –المتتابعة الهندسية– Geometric Sequences
geometric progression:
المتوالية الهندسية هي سلسلة من الأعداد و في هذه السلسلة فإن كل عددٍ يضرب بعددٍ ثابت حتى نحصل على العدد الذي يليه في تلك السلسلة.
سلسلة الأعداد 1,2,4,8,16..... هي عبارة عن متوالية هندسية – لماذا ؟
لأننا نضرب كل عددٍ فيها بالعدد 2 حتى نحصل على العدد الذي يليه في تلك المتوالية أو السلسلة , فنحن ضربنا العدد 1 بالعدد 2 حتى نحصل على العدد الذي يليه وهو العدد 2 ثم ضربنا العدد 2 بالعدد 2 فحصلنا على العدد الذي يليه وهو العدد أربعة ثم ضربنا العدد 4 بالعدد 2 فحصلنا على العدد 8 ثم ضربنا العدد 8 بالعدد 2 فحصلنا على العدد الذي يليه وهو العدد 16 و هكذا إلى ما لا نهاية.
بكلماتٍ أخرى فإن المتوالية الهندسية أو المتتابعة الهندسية geometric sequence هي تتابع أعداد يتم إيجاد كل عددٍ فيها عن طريق ضرب العدد السابق له بعددٍ ثابت (غير الصفر) و يدعى هذا العدد الثابت

بالنسبة الثابتة. common ratio
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...
في المثال السابق تم ضرب كل عددٍ من الأعداد الموجودة في تلك المتوالية الهندسية بالعدد 2 للحصول على العدد الذي يليه.

أبرم شخصٌ ما قد أبرم عقداً مع مليونير أمريكي يقضي بأن يدفع ذلك الشخص للمليونير مئة الف دولار أمريكي مقابل أن يعطيه المليونير دولاراً واحداً في اليوم الأول و ان يعطي ذلك الشخص للمليونير في اليوم الثاني مئة ألف دولار مقابل أن يعطيه المليونير دولارين اثنين و ان يعطي ذلك الشخص للمليونير مئة ألف دولار في اليوم الثالث مقابل أن يعطيه المليونير أربع دولارات بمعنى أن يعطي المليونير لذلك الشخص كل يوم ضعف المبلغ الذي كان يعطيه إياه في اليوم السابق – المهم في الأمر أن ذلك المليونير تعرض للإفلاس نتيجة ذلك العقد الذي أبرمه مع ذلك الشخص و ذلك بسبب جهله بالمتوالية الهندسية.
حاول أن تحسب المبالغ التي كان يتوجب على ذلك المليونير أن يدفعها لذلك الشخص بعد مرور شهر من إبرام العقد.

المتوالية الهندسية السابقة هي على المنوال التالي:
1,......2,4,8,16,32,64,128
كل عدد في المتوالية الهندسية السابقة يساوي حاصل جمع جميع الأعداد التي سبقته مضافاً إليه العدد واحد:
فالعدد 128 يساوي 1+2+4+8+16+32+64 مضافاً إليها العدد واحد.
و العدد 64 يساوي 1+2+4+8+16+32 مضافاً إليها العدد واحد.
■حتى نعرف مجموع جميع الأعداد الداخلة في المتوالية الهندسية فإننا نضرب آخر عدد وصلت إليه المتوالية الهندسية بالعدد 2 ثم نطرح منه العدد واحد.
فإذا كان آخر عدد أو اكبر عدد في متواليةٍ هندسية ما هو الرقم 20480 و أردنا ان نعرف مجموع جميع الأعداد الداخلة في هذه المتوالية الهندسية فإننا نضرب ذلك الرقم بالعدد 2 ثم نطرح منه العدد واحد:

20480 ×2=40960
40960-1=40959
40959هو مجموع الأعداد الداخلة في تكوين تلك المتوالية.

في مثالنا السابق إذا أردنا ان نحسب مقدار ما دفعه المليونير لذلك الشخص خلال شهرٍ واحد فإن علينا ان نضرب الرقم الذي طابق اليوم الثلاثين في تلك المتوالية بالعدد 2 و ان نضيف له العدد واحد كما تعلمنا من قبل.
لماذا اليوم الثلاثين أو العدد الثلاثين في تلك المتوالية ؟ لأننا نريد ان نعرف جميع المبالغ التي دفعها المليونير لذلك الشخص خلال شهرٍ واحدٍ فقط.
فإذا علمنا بأن المليونير دفع لذلك الشخصٍ في اليوم الثلاثين مبلغ 5368709 فهذا يعني بأن مجموع ما دفعه المليونير خلال شهر هو:
5368709×2+1= 10737419
10737419دولار أي بحدود 11 مليون دولار , وذلك خلال شهرٍ واحد فقط.

كم سيأخذ ذلك الشخص من المليونير في اليوم الواحد و الثلاثين و فقاً لتلك المتوالية الهندسية ؟
إذا أخذ من المليونير في اليوم الثلاثين 5368709 دولاراً فهذا يعني بأنه سيأخذ من في اليوم الواحد و الثلاثين ضعف ذلك المبلغ أي:
$53687090×2=107374180$

تعتبر الشائعات و طريقة انتشارها أحد التطبيقات العملية للمتوالية الهندسية فالشخص الأول الذي اطلق الشائعة قام بإخبارها مثلاً لخمسة اشخاص و من ثم فقد قام كل واحدٍ من أولئك الخمسة أشخاص بإبلاغ خمسة آخرين فأصبح عدد من يعرفون الشائعة ثلاثين شخصاً بالإضافة إلى الشخص الذي أطلقها:
$5+(5×5)=30$
العدد خمسة الموجود خارج القوس يدل على أول خمسة أشخاص سمعوا بالشائعة من الشخص الذي أطلقها.
$(5×5)$تشير إلى أن كل واحد من الخمسة الأوائل الذين سمعوا الشائعة قام بإبلاغ خمسة أشخاص آخرين بتلك الشائعة حتى أصبح لدينا ثلاثين شخصاً قد سمعوا بتلك الشائعة بما في ذلك الخمسة الأوائل.
الآن و بعد مرور نصف ساعة مثلاً يكون كل واحدٍ من هؤلاء الثلاثين شخصا قد قامَ بإبلاغ خمسة اشخاص جدد فيصبح لدينا 180 شخصاً يعرفون تلك الشائعة : الثلاثين شخصاً السابقين + 150 شخصاً قام أولئك الثلاثين بإبلاغهم الشائعة:
$30+(30×5)=180$
30الأشخاص الذين قاموا بنشر الشائعة.
$(30×5)$تدل على ان كل واحدٍ من أولئك الثلاثين قام بإبلاغ الشائعة لخمسة أشخاصٍ آخرين.
الآن بعد مرور نصف ساعة يقوم كل واحدٍ من المئة و ثمانين شخصاً بإبلاغ الشائعة لخمسة أشخاص آخرين:
$180+(180×5)=1080$
: 180الأشخاص الذين قاموا بنشر الشائعة.
$(180×5)$تعني بأن كل واحدٍ من أولئك المئة و الثمانين شخصاً قد أبلغ الشائعة لخمسة أشخاص.
= 1080عدد الأشخاص الذين قاموا بنشر الشائعة مضافاً إلى عدد الأشخاص الجدد الذين وصلت إليهم الشائعة.
و إذا أكملنا هذه العملية الحسابية سنكتشف بأنه بعد مرور بضعة ساعات فإن الشائعة تكون قد وصلت إلى مئات الآلاف.

يحكى بأن أحد الملوك أراد ان يكافئ مخترع لعبة الشطرنج على اختراعه و لما سأله عن نوع المكافئة التي يرغب بها طلب مخترع لعبة الشطرنج من الملك أن تكون مكافئته عبارةً عن حبات قمح على أن توضع على شكل متوالية هندسية حسب عدد مربعات رقعة الشطرنج – في البداية ظن الملك أن الأمر لن يتطلب منه إلا بضعة مئات من حبوب القمح و لكنه اكتشف لا حقاً بأنه يتوجب عليه أن يمنحه كمياتٍ من القمح تفوق ما هو موجود في كل مستودعات الغلال الموجودة على ظهر كوكب الأرض.
أنتم تعلمون بأن رقعة الشطرنج تحوي 64 مربعاً , فإذا وضعنا حبة قمح في المربع الأول و حبتي قمح في المربع الثاني و أربع حبات قمح في المربع الثالث و ثمان حبات قمح في المربع الرابع فكم عدد حبات القمح التي يتوجب علينا أن نضعها في المربع الأخير في رقعة الشطرنج , أي المربع 64 ؟
إن كل مربع من المربعات الأربعة و الستين يجب أن يحوي ضعف العدد الذي يحتويه المربع السابق له من حبات القمح كما يجب أن يحتوي كل مربع على نصف عدد حبات القمح الذي يحتويها المربع الذي يليه , وهذا يعني بأنه إذا كان علينا أن نعرف عدد حبات القمح فيجب أن لا نضرب العدد 2 بالرقم 64 و إنما

يتوجب علينا أن نضرب الرقم 2 بنفسه 64 مرة:
2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2....
لتسهيل عملية الضرب في مثل هذه الحالات فإننا نقسم عملية الضرب هذه إلى ست أجزاء كل جزءٍ منها يحوي العدد اثنين مضروباً بنفسه عشر مرات و بذلك نكون قد حسبنا العدد ستين و يتبقى علينا العدد أربعة نحسبه في مجموعة تحوي العدد اثنين مضروباً بنفسه أربع مرات و بضرب الناتج الذي حصلنا عليه في كل جزء فإننا نكون قد حسبنا عدد حبات القمح التي يتوجب وضعها في المربعات الأربعة و الستين الخاصة برقعة الشطرنج.
في كل مجموعة من المجموعات الستة فإننا نضرب العدد اثنين بنفسه عشر مرات فتكون النتيجة 1024.
)انتبه جيداً إلى اننا نضرب العدد اثنين بنفسه عشر مرات ولا نضربه بالعدد عشرة(
يمكنك أن تضرب العدد اثنين بنفسه عشر مرات باستخدام الآلة الحاسبة و ذلك برفع العدد اثنين إلى القوة عشرة و للقيام بذلك اتبع الخطوات التالية:
اضغط الرقم 2 (لأن الرقم اثنين هو العدد الذي نريد رفعه للقوة(
اضغط الزر) Xy زر الرفع للقوة(
اضغط الزر 10 (لأننا نريد رفع العدد اثنين إلى القوة عشرة أي أننا نريد أن نضرب العدد 2 بنفسه عشر مرات(
اضغط الزر = يساوي
فتحصل على النتيجة 1024.

يصبح لدينا ست مجموعات كل مجموعة تتألف من الرقم 1024.
لحساب المربعات الأربعة المتبقية من خانات الشطرنج فإننا نضرب العدد اثنين بنفسه أربع مرات (ولا نضربه بالعدد أربعة(
2×2×2×2=16
و يمكننا حل هذه المسالة برفع العدد اثنين إلى القوة أربعة في الآلة الحاسبة:
اضغط الزر 2 (العدد الذي تريد رفعه للقوة(
اضغط الزر) XY زر الرفع للقوة)
اضغط الزر 4 (القوة التي تريد رفع العدد إليها(
اضغط زر يساوي=
تحصل على النتيجة و هي بالطبع 16.

الان أصبح لدينا ست مجموعات يتألف كل منه من الرقم 1024 و مجموعة واحدة تتألف من الرقم 16 على اعتبار أن عدد خانات رقعة الشطرنج هي 64 خانة.
ماذا نفعل بهذه المجموعات , هل نجمعها مع بعضها البعض حتى نعرف عدد حبات القمح التي يتوجب وضعها في خانات رقعة الشطرنج؟
كلا , إياك أن تقوم بجمعها مع بعضها البعض لأن المطلوب كان في البداية أن نضرب العدد اثنين ببعضه 64 مرة لا أن نجمعه مع بعضه , و ليس أن نضربه بالعدد 64.
إذا المطلوب منا الان أن نضرب الرقم 1024 بنفسه ست مرات لأن لدينا ست مجموعات كل مجموعة منها هي حاصل ضرب العدد اثنين مع بعضه عشر مرات , كما يتوجب علينا أن نضرب الناتج كذلك مع العدد 16 الذي يمثل الخانات الأربعة في رقعة الشطرنج.
لتسهيل عملية الضرب فإننا نقسم المجموعات الستة إلى ثلاث مجموعات تحوي كل منها رقمي 1024 نقوم بضربهما مع بعضهما البعض:

1024×1024=1048576
و هكذا أصبح لدينا ثلاث مجموعات تحوي كلٌ منهما الرقم 1048576.
الآن يتوجب علينا أن نحسب الآتي:
16×1048576×1048576×1048576
حتى نعرف عدد حبات القمح اللازم لملء خانات رقعة الشطرنج الأربعة و السنين.
إن النتيجة ستكون:
18 446 744 073 709 551 615
و يمكنك ان تحسب النتيجة على الآلة الحاسبة برفع العدد اثنين إلى القوة 64:
اضغط العدد 2
اضغط زر الرفع للقوةXY
اضغط الرقم 64
اضغط الزر=

برأيك كم كيلو غرام من القمح سنحتاج للحصول على هذا العدد من الحبوب ؟
إن المتر المكعب الواحد من القمح يحتوي على نحو خمسة عشر مليون حبة قمح , و هذا يعني ان عدد حبات القمح الذي طلبها مخترع لعبة الشطرنج تحتاج إلى مستودع حبوب حجمه 12 ألف كيلو متر مكعب (و ليس 12 ألف متر مكعب) اثنا عشر ألف متر مكعب من القمح.

لو طلب مخترع لعبة الشطرنج من الملك أن تكون مكافئته أن يوضع له في كل خانة من خانات رقعة الشطرنج عددٌ من حبات القمح يساوي ثلاثة أضعاف العدد الموجود في الخانة التي تسبقها , أي أن توضع حبات القمح على شكل متوالية هندسية على الشكل التالي:
1,3,9,18,36,72.....
فكيف كنا سنحسب عدد حبات القمح التي تلزمنا لملء جميع خانات رقعة الشطرنج الستة و الأربعين ؟
كان يتوجب علينا عندها ان نتبع الخطوات السابقة ذاتها و كان بدلاً من ان نضرب العدد 2 بنفسه 46 مرة , كان يتوجب علينا عندها أن نضرب العدد 3 بنفسه 64 مرة , لماذا؟
لأن مخترع اللعبة طلب من الملك أن تحوي كل خانة من خانات رقعة الشطرنج ثلاثة أمثال العدد الموجود في الخانة السابقة.
كما أن بإمكاننا أن نحسب ذلك عن طريق رفع العدد ثلاثة للقوة 64 عن طريق الالة الحاسبة وفق الخطوات :
نضغط العدد ثلاثة.
نضغط زر الرفع للقوة.XY
نضغط الرقم 64 لأننا نرغب في رفع العدد ثلاثة للقوة 64.
نضغط يساوي=
■المتواليات الهندسية في الطبيعة:
يمكن القول بأن جميع الكائنات الحية تنمو وتتكاثر على شكل متوالية هندسية فكل كائنٍ حي يبدأ حياته على شكل خليةٍ واحدة و هذه الخلية تنقسم إلى خليتين و كلٌ منهما تنقسم كذلك إلى خليتين إلى ان نحصل على ملياراتٍ من الخلايا التي يتألف منها الكائن الحي.

■حساب الاحتمالات:
أراد سامر في نهاية العام المدرسي أن يلتقط صورة مع صديقه نور أمام جدار:

كان هنالك وضعين فقط يمكن التقاطهما و هما أن يقف سامر إلى يسار نور أو أن يقف سامر إلى يمين نور , فكان هنالك احتمالين فقط و هما:
سامر ـ نور او نور ـ سامر
الآن أراد صديقهما محمد أن ينضم إليهما و أن يلتقط معهما صوراً تذكارية , فكم صورة يمكن الآن لهما التقاطها و كم هي عدد الاحتمالات الممكنة لالتقاط الصور:
الاحتمال الأول : أن يكون سامر بين محمد و نور.
محمد ـ سامر ـ نور
الاحتمال الثاني : أن يكون محمد بين سامر و نور.
سامر ـ محمد ـ نور
الاحتمال الثالث : أن يكون نور بين محمد و سامر.
محمد – نور- سامر
الاحتمال الرابع : أن يقف نور إلى اليمين و أن يكون سامر في المنتصف و محمد إلى اليسار:
نور ـ سامر ـ محمد
الاحتمال الخامس : : أن يقف سامر إلى اليمين و أن يكون نور في المنتصف و ان يقف محمد إلى اليسار:
سامر ـ نور ـ محمد
الاحتمال السادس و الأخير : أن يقف نور إلى اليمين و ان يكون محمد في المنتصف و أن يقف سامر إلى اليسار.
نور – محمد سامر
كيف نحسب الاحتمالات هنا؟
في الحالة الأولى كان لدينا سامر و نور فقط و كان لديهما احتمالين فقط لالتقاط الصورة و هما:
أن يقف سامر إلى يسار نور أو أن يقف سامر إلى يمين نور:
سامر ـ نور او نور ـ سامر
في الحالة الثانية دخل محمد إلى موقع التقاط الصور و كان لديه ثلاثة احتمالات بالنسبة لسامر و نور و هذه الاحتمالات الثلاثة هي:
أن يقف إلى يمين سامر و نور:
محمد – سامر –نور
أن يقف إلى يسار سامر و نور.
سامر – نور – محمد
أن يقف بين سامر و نور.
سامر –محمد- نور

الآن حتى نتوصل إلى جميع الاحتمالات الممكنة فإننا نضرب الاحتمالات التي كانت ممكنة قبل وصول محمد بالاحتمالات التي أصبحت ممكنة بعد وصول محمد (الخيارات التي كانت متوفرة لسامر و نور قبل وصول محمد و الاحتمالات التي كانت متوفرة لمحمد بعد وصوله:
$2×3=6$

قم بقص مربعات من الورق ذات ألوانٍ ثلاثة و حاول أن ترتب كل ثلاثة منها إلى جوار بعضها البعض على خطٍ مستقيم بحيث تحصل على اكبرِ عددٍ ممكن من المصفوفات التي لا تشبه الواحدة منها الأخرى.
قم بقصِ مربعات من الورق و اكتب على بعضها اسم نور و على بعضها الآخر اسم سامر و على بعضها

اسم محمد و حاول أن ترتب كل ثلاثة منها إلى جوار بعضها البعض على خطٍ مستقيم بحيث تحصل على اكبر عددٍ ممكن من المصفوفات التي لا تشبه الواحدة منها الأخرى.

■الآن انضم عمر إلى كلٍ من محمد و سامر و نور فأصبحوا أربعة – ماهي الاحتمالات التي يمكن لهم أن يقفوا وفقها لالتقاط صورة أمام جدار المدرسة بحيث يكونون على نسقٍ واحد في مواجهة الكاميرة و وجوههم جميعاً متجهة نحو الكاميرة؟
نحن نعلم قبل انضمام عمر بأنه كان هنالك ستة أوضاع اتخذها سامر و نور و محمد , فما هي الأوضاع الاضافية التي يمكن أن يؤدي انضمام عمر إلى حدوثها ؟
الاحتمال الأول : يمكن ان يقف عمر إلى أقصى يمين المجموعة بحيث يكون الثلاثة الآخرين إلى يساره.
عمر – سامر – محمد –نور
الاحتمال الثاني : يمكن لعمر أن يقف إلى اقصى يسار المجموعة بحيث يكون الثلاثة الآخرين إلى يمينه.
سامر – محمد – نور-عمر
الاحتمال الثالث : أن يقف بين الأول و الثاني , أي أن يقف بين سامر و محمد:
سامر - عمر - محمد – نور
الاحتمال الرابع : أن يقف عمر بين الثاني و الثالث , أي ان يقف ما بين محمد و نور:
سامر - محمد - عمر – نور

الآن فأن لدينا ستة احتمالات سابقة يمكن للأصدقاء الثلاثة أن يتخذوها و لدينا الآن أربع احتمالات جديدة بعد ان انضم عمر إليهم و بناءً على طريقة حساب الاحتمالات فإن جميع الاحتمالات المتاحة لهؤلاء الأصدقاء الأربعة تساوي $6\times4=24$
أربعة و عشرين احتمالاً ممكناً ناتجة عن جداء ستة في أربعة.
هل لديك شك في طريقة حساب الاحتمالات هذه ؟
هل تعتقد بأن احتمالات الممكنة لا تصل إلى أربعة و عشرين احتمالاً ؟
حسناً دعنا نتأكد من ذلك الأمر بشكلٍ عملي:
الاحتمالات:
عمر - محمد – نور – سامر
عمر – نور – محمد – سامر
عمر-نور-سامر -محمد
عمر - سامر – نور – محمد
عمر – سامر – محمد – نور
عمر – محمد –سامر –نور
محمد- عمر- نور – سامر
محمد- نور – عمر –سامر
محمد- نور – سامر –عمر
محمد- عمر – سامر- نور
محمد – سامر – عمر- نور
محمد- سامر – نور- عمر
سامر- محمد- عمر –نور
سامر – محمد-نور –عمر
سامر – نور- محمد –عمر

سامر- نور – عمر – محمد
سامر – عمر –محمد - نور
سامر – عمر – نور – محمد
نور - محمد – عمر – سامر
نور – محمد – سامر – عمر
نور – عمر – سامر – محمد
نور – عمر - محمد - سامر
نور - سامر – محمد- عمر
نور – سامر - عمر – محمد

أربعة و عشرين احتمالاً – إذا طريقة حساب الاحتمالات صحيحة.
يمكنك أن تكتب الأسماء الأربعة على قطع ورق و أن تصنع منها أكبر عددٍ ممكن من المصفوفات على شرط أن تتألف كل مصفوفة من أربعة أسماء متوضعة على نسقٍ واحد و أن لا يكون هنالك تشابه بين مصفوفة و أخرى.
و بشكلٍ مختصر فإن بإمكاننا أن نحسب الاحتمالات بالنسبة لثلاثة اشخاص او ثلاثة أشياء على الشكل التالي:
$1\times2\times3=6$
ستة احتمالات
و يمكننا ببساطة ان نحسب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لأربعة أشخاص أو اربعة أشياء على الشكل التالي:
$1\times2\times3\times4=24$
كما مرت معنا سابقاً
و يمكننا حساب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لخمسة أشخاص أو خمسة أشياء على الشكل التالي:
$1\times2\times3\times4\times5=120$
لنتأكد من صحة هذا الأمر:
لنفترض بأن صديقاً جديداً انضم إلى الأصدقاء الأربعة و اسمه مجد , ما هي الاحتمالات التي يمكن أن يظهر فيها مجد في الصورة مع أصدقائه الأربعة:
الاحتمال الأول : أن يقف في أقصى اليمين.
الاحتمال الثاني : أن يقف بعد الأول (من اليمين)
الاحتمال الثالث: أن يقف بعد الثاني.
الاحتمال الرابع : أن يقف بعد الثالث.
الاحتمال الخامس : أن يقف بعد الرابع (في أقصى اليسار)
لدينا خمسة احتمالات و كان لدينا 24 احتمال قبل وصول مجد/
$5\times24=120$
120احتمال.
و أذا انضم للمجموعة صديقٌ جديد , أي في حال أصبح هنالك ستة أصدقاء فإننا نحسب الاحتمالات الممكنة على الشكل التالي:
$1\times2\times3\times4\times5\times6=720$
لنتأكد من الأمر:
نفترض بأن صديقاً جديداً هو عبيدة قد انضم إلى المجموعة ليلتقط صورة معهم فما هي الاحتمالات المتاحة أمامه:

عبيدة – مجد – محمد – عمر – نور – سامر
مجد – عبيدة – محمد – عمر – نور – سامر
مجد – محمد – عبيدة – عمر – نور – سامر
مجد – محمد – عمر – عبيدة – نور – سامر
مجد – محمد – عمر – نور – عبيدة – سامر
مجد – محمد - عمر – نور – سامر – عبيدة
لدينا ستة احتمالات و كان لدينا سابقاً 120 احتمال.
$6 \times 120 = 720$
أي أن هنالك 720 احتمال للمواقع التي يمكن أن يتخذها ستة أصدقاء عندما يقفون بجوار بعضهن البعض امام عدسة الكاميرة.
النتيجة صحيحة.
$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

لو كان هنالك عشرة أصدقاء يريدون التقاط صور إلى جانب بعضهم البعض فإننا ببساطة نحسب الاحتمالات الممكنة على الشكل التالي:
$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 362880$
هنالك 362880 احتمال متاحة أمام عشرة أشخاص حتى يلتقطوا صوراً بجوار بعضهم البعض على نسقٍ واحد و وجوههم متجهة نحو عدسة الكاميرة.

■لدينا أربع سيارات و كراج مؤلف من عشر مواقف لوقوف السيارات , ماهي جميع الاحتمالات المتاحة لنا لإيقاف تلك السيارات في تلك المواقف العشرة ؟
بدايةً نحسب الاحتمالات المتاحة بالنسبة للسيارات الأربعة بالنسبة لبعضها البعض و فق الطريقة المعتمدة لحساب الاحتمالات:
أربع سيارات:
$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
24احتمالاً – لنتأكد بشكل عملي ملموس من مصداقية هذه الطريقة في الحساب:
مرسيدس – تويوتا – كيا – كاديلاك
مرسيدس- كيا – تويوتا – كاديلاك
مرسيدس – كاديلاك – تويوتا –كيا
مرسيدس –كاديلاك – كيا – تويوتا
مرسيدس – كيا – كاديلاك – تويوتا
مرسيدس – تويوتا – كاديلاك – كيا
تويوتا – مرسيدس – كيا – كاديلاك
تويوتا –مرسيدس – كاديلاك – تويوتا
تويوتا – كيا – مرسيدس – كاديلاك
تويوتا – كيا – كاديلاك – مرسيدس
تويوتا – كاديلاك – كيا - مرسيدس
تويوتا – كاديلاك – مرسيدس – كيا
كيا – مرسيدس – كاديلاك – تويوتا
كيا – مرسيدس – تويوتا – كاديلاك

كيا – تويوتا- مرسيدس – كاديلاك
كيا – تويوتا- كاديلاك – مرسيدس
كيا – كاديلاك – تويوتا – مرسيدس
كيا – كاديلاك – مرسيدس – تويوتا
كاديلاك – كيا – مرسيدس – تويوتا
كاديلاك – كيا – تويوتا – مرسيدس
كاديلاك – مرسيدس- كيا – تويوتا
كاديلاك – مرسيدس – تويوتا- كيا
كاديلاك – كيا – تويوتا – مرسيدس
كاديلاك – كيا – مرسيدس- تويوتا

24احتمال – الطريقة صحيحة
و لو كان لدينا خمس سيارات لحسبنا الاحتمالات الممكنة كالاتي:
$1\times2\times3\times4\times5=$
و لو كان لدينا ست سيارات لحسبنا الاحتمالات الممكنة على الشكل التالي:
$1\times2\times3\times4\times5\times6=$
و هكذا...
الآن لدينا عشر مواقف للسيارات في الكراج فما هي الاحتمالات الممكنة لوقوف تلك السيارات الأربعة في تلك المواقف ؟
مثلاً:
كاديلاك – موقف فارغ – مرسيدس – موقف فارغ- تويوتا- موقف فارغ – كيا- موقف فارغ- موقف فارغ – موقف فارغ...
و ما إلى ذلك من الاحتمالات...
لكي نعرف ذلك الأمر فإننا نضرب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لأربع سيارات و هي 24 احتمالاً كما سبق لنا أن قمنا بحسابها بعدد المواقف و هي هنا عشرة مواقف:
$24\times10=240$
أي أن هنالك 240 احتمال متاحة أمامنا للكيفية التي يمكن أن نصف فيها أربع سيارات في كراج (مرآب) مؤلف من عشرة مواقف.

الآن لنفترض بأن هنالك ست شاحنات صغيرة قد وصلت إلى الكراج – ماهي الاحتمالات التي يمكن لهذه الشاحنات الستة أن تقف فيها في الكراج بالنسبة لبعضها البعض و بالنسبة للسيارات الأربعة التي كانت موجودة سابقاً في الكراج ؟
أولاً نحسب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لهذه الشاحنات الستة:
$1\times2\times3\times4\times5\times6=720$
إذا لدينا 720 احتمال للكيفية التي يمكن أن تقف فيها الشاحنات الستة بالنسبة لبعضها البعض.
الآن ما هي الاحتمالات المتاحة لهذه الشاحنات الستة أن تقف فيها بالنسبة لبعضها البعض و بالنسبة للسيارات الأربعة الموجودة سابقاً في المواقف العشرة الموجودة في الكراج ؟
نحن كنا سابقاً قد حسبنا الاحتمالات المتاحة أمام أربع سيارات في عشر مواقف:
$24\times10=240$
الاحتمالات المتاحة لهذه الشاحنات الستة أن تقف فيها بالنسبة لبعضها البعض و بالنسبة للسيارات الأربعة

الموجودة سابقاً في المواقف العشرة الموجودة في الكراج هي:
$240\times720=172800$
172800هي الاحتمالات المتاحة أمام أربع سيارات و ست شاحنات لكيفية الوقوف في كراج يحوي عشرة مواقف.

■ملخص كيفية حساب الاحتمالات:
لحساب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لعدة أشياء فإننا نضرب أعداد تلك الأشياء ببعضها البعض:
مثال الاحتمالات المتاحة أمام خمس طائرات=
$1\times2\times3\times4\times5=120$
لحساب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لعدة أشياء بالنسبة لعدة خاناتٍ أو مواضع فإننا نضرب عدد الاحتمالات الممكنة بالنسبة لتلك الأشياء في عدد الخانات المتاحة:
مثال ماهي الاحتمالات الممكنة لصف خمس طائرات في مطار يحوي خمسة مرابض للطائرات ؟
$120\times5=600$
600احتمال
إذا قمنا بحساب الاحتمالات المتاحة أمام عددٍ معينٍ من الأشياء في مواضع أو خاناتٍ معينة ثم أضيفت أشياء جديدة و طلب منا أن نحسب الاحتمالات الممكنة لتموضع الأشياء الجديدة بالنسبة للأشياء القديمة في الخانات المتاحة فإننا نقوم بضرب الاحتمالات المتاحة أمام الأشياء القديمة بالاحتمالات المتاحة أمام الأشياء الجديدة.
مثال:
حاملة طائرات تحوي 12 منصةً لهبوط الطائرات على سطحها , و على سطحها تجثم خمس طائرات – ماهي الاحتمالات المتاحة أمام تلك الطائرات الخمسة المتعلقة بالكيفية التي يمكن أن تجثم فيها على تلك المنصات الاثني عشر ؟
نحسب الاحتمالات المتاحة لتموضع خمس طائرات بالنسبة لبعضها البعض بالشكل التالي:
$1\times2\times3\times4\times5=120$
هنالك 120 احتمال لطرق تموضع الطائرات الخمسة بالنسبة إلى بعضها البعض.
الان نحسب الاحتمالات المتاحة أمام هذه الطائرات الخمسة لكيفية وقوفها في المرابض الاثني عشر الموجودة في حاملة الطائرات و ذلك بضرب الاحتمالات المتاحة امام الطائرات الخمسة في عدد الخانات أو المواضع:
$120\times12=1440$
الرقم 120 يمثل الاحتمالات المتاحة لترتيب الطائرات الخمسة بالنسبة لبعضها البعض.
الرقم 12 هو عدد المنصات الموجودة على سطح حاملة الطائرات.
1440هو عدد الاحتمالات المتاحة أمام خمس طائرات للوقوف في 12 منصة للطائرات.
الآن هبطت سبع طائرات جديدة على حاملة الطائرات – ماهي الاحتمالات المتاحة بالنسبة للطائرات السبعة الجديدة و التي يمكن أن تتوضع بها بالنسبة لبعضها البعض و بالنسبة للطائرات الخمسة القديمة الموجودة على سطح حاملة الطائرات في الخانات الاثني عشر المتاحة على سطح حاملة الطائرات؟
نحسب الاحتمالات المتاحة امام الطائرات السبعة بالنسبة لبعضها البعض فنقول:
$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7=5040$
5040هي الاحتمالات المتاحة امام سبع طائرات.
الآن نضرب رقم الاحتمالات هذا بعدد الاحتمالات المتاحة امام الطائرات الخمسة القديمة في المرابض الاثني عشر أي 1440 فنقول:

1440×5040=7257600

7257600هي الاحتمالات المتاحة أمام 12 طائرة لكيفية التموضع على سطح حاملة طائرات تحوي 12 مربضاً للطائرات.

■لاحظ انه عندما يكون لدينا عدة أشياء و نريد أن نحسب عدد الاحتمالات المتاحة لترتيب تلك الأشياء مع بعضها البعض فإن عدد تلك الأشياء يدل ضمنياً على عدد الخانات المتاحة كذلك

فإذا طلب منا أن نحسب الاحتمالات الممكنة لترتيب سبع سيارات في مكانٍ ما فإن هذا يعني بأن لدينا سبع أماكن فقط لترتيب تلك السيارات و علينا أن نبني كل احتمالاتنا على وجودِ سبعة مواضع فقط لإيقاف السيارات فنقول بأن الاحتمالات المتوفرة هي:

1×2×3×4×5×6×7=5040

لدينا 5040 احتمالاً لترتيب تلك السيارات السبعة.

و لكنه إن طلب مني أن أرتب تلك الأشياء في 12 موضعاً , أي في حال كان عدد الخانات أو المواضع أكبر من عدد الأشياء فإنني أضرب عدد الاحتمالات الممكنة لدي في عدد الخانات فأقول:

5040×12=60480

■ما هي احتمالات المتاحة لتكوين و اكتشاف كلمة سر جهاز كمبيوتر ؟

لدينا 26 حرف إنكليزي و 10 أرقام و 15 رمز على الأقل يمكن استخدامها , أي أنه لدينا 51 عنصراً على أقل تقدير نضربها ببعضها البعض على الشكل التالي:

1×2×3×4×5×6×7×8×9×10×12............×51=

هو عدد الاحتمالات المتوفرة.

هل يعرف أحدكم طريقة تمكننا من حساب الاحتمالات باستخدام الالة الحاسبة دون أن نحتاج إلى إدخال كل الأرقام بشكلٍ يدوي؟

■factorialالنتيجة العاملية –التحليل إلى العوامل

النتيجة العاملية او نتيجة التحليل إلى العوامل factorial هي النتيجة التي نحصل عليها عندما نضرب العدد بكل الأعداد الأقل منه.

مثال : النتيجة العاملية للعدد أربعة هي ناتج ضرب العدد أربعة بكل الأعداد الأدنى منه أي:

1×2×3×4=24

العدد 24 هو النتيجة العاملية factorial للعدد أربعة.

■قاعدة تقريبية تقول بأن الإنسان يسير في الساعة الواحدة تقريباً عدداً من الكيلومترات يساوي تقريباً عدد الخطوات التي يخطوها في ثلاث ثواني.

■أي عدد مرفوع للقوة صفر يساوي الواحد:

واحد مرفوع للقوة صفر = واحد

3مرفوع للقوة صفر = واحد

2مرفوع للقوة صفر = واحد

4مرفوعة للقوة صفر = 1

5مرفوعة للقوة صفر = 1

■2n تعني n×2 أي عدد مضروب باثنين.
n+1 تعني العدد التالي.
n-1 تعني العدد السابق.

■إذا ضربنا العدد السابق لأي عدد بالعدد التالي له فإننا نحصل على مربع ذلك العدد ناقص واحد و الصيغة الرياضية لهذا الكلام هي:

(n-1) (n+2)=n2 -1

(n-1) تعني العدد السابق لعددٍ ما هو العدد n
(n+2) تعني العدد التالي لعددٍ ما هو العدد n
n2 أي العدد مرفوع للقوة 2 أو مربع ذلك العدد.

أمثلة:

لدينا العدد 6 ـ العدد السابق له هو العدد 5 و العدد التالي له هو العدد 7 , الآن:

5×7=35+1 = 36

36 هو مربع العدد 6.

■خوارزمية إقليدس:

الهدف من هذه الخوارزمية : العثور على القاسم المشترك الأكبر لعددين.

حساب هذه الخوارزمية:

نطرح العددين الذين نرغب بإيجاد قاسمهما المشترك الأكبر.
نحذف العدد الأكبر و نبقي ناتج عملية الطرح.
نحذف العدد الثاني من ناتج عملية الطرح.
نكرر العملية حتى نحصل على عددين متماثلين.

■اختر رقماً مؤلفاً من ثلاثة أعداد – أي رقم يخطر ببالك.

ليكن مثلاً 555

اكتب الرقم الذي اخترته مرة ثانية ليصبح لديك رقم مؤلف من ستة أعداد.

555555

اقسم هذا العدد على سبعة:

555555÷7=79365

أياً يكن الرقم الذي اخترته فإنه يقبل القسمة على العدد سبعة دون ان يكون هنالك باقي.

اقسم الناتج على 11:

79365÷11=7215

أياً يكن ذلك الرقم فإنه يقبل القسمة على 11 دون باقي.

اقسم ناتج القسمة على العدد 13 مثلاً:

7215÷13=555

ناتج القسمة هو 555 و هو ذاته الرقم الذي اخترته في البداية.

في الحالة السابقة عندما كررنا الرقم 555 و جعلناه 555555 فهذا يعني بأننا ضربناه في الرقم 1001.

555 ×1001=555555

وعندما قسمنا الناتج على الأعداد 11 و 13 و 7 فهذا يعني باننا قسمنا هذا العدد على 1001 لأن

:1001 =7×13×11
و باختصار فإن ما فعلناه هو اننا ضربنا الرقم الذي اخترناه برقمٍ معين ثم قسمناه على العدد ذاته و لذلك من الطبيعي أن تكون النتيجة هي الرقم ذاته الذي اخترناه أول مرة أي الرقم 555.

■اختر رقماً مؤلفاً من عدة أعداد.
و ليكن ذلك الرقم مثلاً 5555.
جد مجموع الأعداد المؤلفة لهذا الرقم.
5+5+5+5=20
أطرح مجموع الأعداد من الرقم الذي اخترته.
يعني نطرح مجموع أعداد الرقم 5555 من الرقم الذي اخترناه , أي أننا نطرح 20 من 5555:
5555-20= 5535
قم بحذف أي عدد من ناتج الطرح و اذكر ناتج جمع الأعداد المتبقية:
لنفترض بانك حذفت العدد 3 فإن ناتج الأعداد المتبقية هو 15.
5+5+5=15
الآن نبحث عن أقرب عدد إذا اضفناه إلى 15 يقبل القسمة على العدد 9 دون باقي.
ما هو أقرب رقم من الرقم 15 يقبل القسمة على العدد 9 دون باقي ؟
إنه الرقم 18.
18÷2=9
ما هو العدد الذي أضفناه إلى الرقم 15 حتى نحصل على الرقم 18 ؟
إنه العدد ثلاثة 3.
■العدد الذي قمت بحذفه هو العدد ثلاثة.

كيف حدث هذا الأمر ؟
لقد طبقنا القاعدة الرياضية التي تقول بأننا إذا طرحنا من رقمٍ ما مجموع الأعداد المكونة له فلا يتبقى لدينا إلا العدد الذي يقبل القسمة على تسعة.

مزيد من الأمثلة:
ليكن لدينا الرقم 1974.
ما هو مجموع الأعداد المكونة له ؟
1+9+7+4= 21
الآن نطرح العدد 21 من العدد 1974.
1974 – 21 = 1953
لنفترض بأننا حذفنا العدد 9 فتتبقى لدينا الأعداد 153.
1+3+5= 9
ما هو أقرب عدد يقبل القسمة على العدد 9دون باقي ؟
إنه العدد 9 , وهو العدد ذاته الذي قمنا بحذفه.

■طرح الرقم من مقلوبه:
قم باختيار رقم ما مؤلف من عدة أعداد:
ليكن ذلك الرقم هو 2005.

قم بعكس هذا الرقم:
2005تصبح 5002.
اطرح الرقم الأصغر من معكوسه:
5002-2005= 2997
ناتج عملية الطرح هو 2997
الآن قم بحذف عددٍ ما من ناتج الطرح و ليكن ذلك العدد هو العدد 7 سبعة.
يتبقى لدينا الرقم 299.
اجمع الأعداد المكونة للرقم 299 مع بعضها البعض.
2+9+9= 20
ناتج جمع الأعداد المكونة مع بعضها البعض هو الرقم 20.
الآن ما هو أقل عدد يمكن أن نضيفه للرقم 20 حتى نحصل على رقمٍ يقبل القسمة على العدد تسعة.
صحيح إنه العدد سبعة.
7+20=27
لا تنسى بأن العدد الذي سبق لنا ان قمنا بحذفه هو العدد سبعة.
الرقم 27 هو أقرب رقم (تصاعدي) من الرقم 20 يقبل القسمة على العدد تسعة دون باقي:
27÷9=3

■يمكنك أن تعرف العدد الذي تم حذفه و لكن عليك ان تضع شرطين اثنين و هما:
أن لا ينتهي الرقم بالصفر.
أن لا يقل الفارق بين أول و آخر رقم عن اثنين.

نختار رقماً يحقق الشرطين السابقين و ليكن الرقم 852 : وهو رقمٌ يحقق الشرطين السابقين فهو لا ينتهي بصفر كما ان الفرق بين أول عدد و آخر عدد أكبر من اثنين.
نعكس الرقم 852 فيصبح 258.
اطرح الرقم من معكوسه 852 - 258 = 594
احذف رقماً ما من ناتج عملية الطرح , و ليكن مثلاً العدد تسعة 9.
يبقى لدينا العددين 4و 5.
نجمعهما مع بعضهما البعض 4+5 = 9.
ما هو أقرب عدد رقم من العدد تسعة يقبل القسمة على العدد تسعة ؟
إنه العدد تسعة وهو ذاته العدد الذي قمنا بحذفه.

■عندما تختار أي رقمٍ ثلاثي لا ينتهي بالصفر ولا يقل الفرق بين أول عددٍ فيه و أخر عددٍ فيه عن 2 فإنك إذا عكست ذلك الرقم و طرحته من معكوسه ثم إذا عكست نتيجة الطرح و جمعتها مع معكوسها فإنك تحصل دائماً على العدد 1089.
■مثال:
اختر أي رقم ثلاثي لا ينتهي بالصفر على أن لا يقل الفرق بين أول عددٍ فيه و آخر عددٍ منه عن 2:
ليكن ذلك الرقم 523 مثلاً.
اعكس الرقم الذي اخترته فتحصل على 325.
اطرح العدد من معكوسه:
523 – 325 = 198

اعكس نتيجة الطرح 198 فتحصل على الرقم 891.
اجمع نتيجة الطرح مع معكوسها:
891+198=1089
حصلنا على الرقم 1098.
■جرب هذه الطريقة مع أرقام أخرى تحقق الشرطين و ستحصل دائماً على الرقم 1098.

الرياضيات السحرية للأطفال

الهدف الرئيسي من هذه السلسلة يتمثل في أن يستعمل الطفل الآلة الحاسبة حتى يتحقق بنفسه من صحة الحسابات الواردة فيها و لكي يطبق القواعد الموجودة فيها على أمثلة أخرى بحيث يتقن بطريقة لاشعورية أكبر قدر ممكن من المهارات الرياضية.

الخصائص السحرية للعدد 9

عرف الأوروبيون النظام العشري في العد و الأرقام العربية –الهندية Hindu–Arabic لأول مرة في العام 1202 و ذلك عبر كتاب Liber abaci لمؤلفه الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي Leonardo Fibonacciو قبل ذلك كانت الأرقام الرومانية البدائية و المعقدة هي المستخدمة في أوروبا و كذلك فإن أوروبا لم تعرف الصفر إلا من خلال فيبوناتشي الذي أتى به من المسلمين و قبل ذلك لم يكن لدى الأوروبيين أي فكرة عن الصفر و لكي تتبين أهمية الصفر تخيل إمكانية إجراء أي عملية رياضية أو كتابة أية معادلة كيميائية أو فيزيائية دون الصفر.

لقد كان فيبوناتشي مفتوناً بالتقدم الذي وصل إليه علم الجبر في العالم الإسلامي وقد كان فيبوناتشي أول من أدخل إلى أوروبا طريقة إسقاط العدد تسعة

casting out ninesوهي الطريقة التي ابتكرها المسلمون للتأكد من صحة العمليات الحسابية وهي الطريقة التي ذكرتها بشكل مفصل سابقاً (راجع الجزء الأول.)

لنتأكد من صحة عملية الضرب التالية:

734 × 879 = 645186

نجمع الأعداد المكونة للحد الأول 734 مع بعضها البعض 7+4+3 = 14

نجمع الأعداد المكونة للحد الثاني 879 مع بعضها البعض 9 + 7+8 = 24

نجمع الأعداد المكونة للنتيجة 645186

6+8+1+5+4+6= 30

نتيجة جمع أعداد الحد الأول هي 14 أي 1 +4 = 5

نتيجة جمع أعداد الحد الثاني هي 24 أي 2 + 4 = 6

و ناتج جمع الأعداد المكونة للنتيجة هو 30

و كما تعلمون فإن 5×6 = 30 و هذا يعني أن عملية الضرب صحيحة.

لنحاول إعادة الخطوات السابقة مع حذف العدد 9

لنتأكد من صحة عملية الضرب التالية:

734 × 879 = 645186

نجمع الأعداد المكونة للحد الأول 734 مع بعضها البعض 7+4+3 = 14

نجمع الأعداد المكونة للحد الثاني 879 مع بعضها البعض و نحذف العدد 9

7+8 = 15

نجمع الأعداد المكونة للنتيجة 645186 و نحذف العدد 9 و مكوناته

9 = 1 + 8لذلك نحذف هذين العددين.

9 = 4+5لذلك نحذف هذين العددين

الآن بقي لدينا العددين 6 و 6

12 =6+6و العدد 12 عبارة عن 1+2 = 3

نتيجة جمع أعداد الحد الأول هي 14 أي 1 +4 = 5

نتيجة جمع أعداد الحد الثاني هي 15 أي 5 + 1 = 6

و ناتج جمع الأعداد المكونة للنتيجة هو 3

و كما تعلمون فإن 5×6 = 30 و الرقم 30 عبارة عن 3+0 = 3 و هذا يعني أن عملية الضرب صحيحة.

لنتأكد من صحة عملية الضرب التالية:

56589 × 983678 = 55665354342

نتيجة جمع أعداد الحد الأول هي 5 + 6 + 5 + 8 + 9 = 33

33 = 3 + 3 = 6

نتيجة جمع أعداد الحد الثاني هي 9 + 8 + 3 + 6 + 7 + 8 = 41

4 + 1 = 5

و ناتج جمع الأعداد المكونة للنتيجة هو

5 + 5 + 6 + 6 + 5 + 3 + 5 + 4 + 3 + 4 + 2 = 48

48عبارة عن 4 + 8 = 12

12عبارة عن 1 + 2 = 3

الآن لنختبر حدي عملية الضرب و نتيجة عملية الضرب بعد الاختزال

30 = 5 × 6و الرقم 30 عبارة عن 3+0 = 3 و هذا يعني أن عملية الضرب السابقة صحيحة.

من أين جئنا بالعددين 5 و 6 ؟

العدد 6 هو نتيجة اختزال الحد الأول اما العدد 5 فهو نتيجة اختزال الحد الثاني أما الرقم 30 فهو نتيجة اختزال نتيجة عملية الضرب و بالتالي فإن عملية الذرب التالية:

6 × 5 = 30

ما هي إلا اختزال لعملية الضرب الأساسية 56589 × 983678 = 55665354342

هل كل شيء واضح ؟

لنحاول إعادة الخطوات السابقة مع حذف العدد 9

لنتأكد من صحة عملية الضرب التالية:

56589 × 983678 = 55665354342

نحذف العدد 9 من الحد الأول

نتيجة جمع أعداد الحد الأول هي 5 + 6 + 5 + 8 = 24 و الرقم 24 عبارة عن

4+2 = 6

نحذف العدد 9 و مكوناته من الحد الثاني

نتيجة جمع أعداد الحد الثاني بعد حذف العدد 9 و العددين 3 و 6 لأن 3+6 = 9 هي

23 = 8 + 7 + 8و الرقم 23 عبارة عن 2+3

3 + 2 = 5

و ناتج جمع الأعداد المكونة للنتيجة بعد حذف العدد 9 و مكوناته هو

12 = 2 + 5 + 5و الرقم 12 عبارة عن 2+1

2+1 = 3

في النتيجة 55665354342 لدينا 4+5 = 9 لذلك نحذفهما و 4+5 = 90 لذلك نحذفهما و 3+6 = 9 لذلك نحذفهما و 3+6 = 9 لذلك نحذفهما فيبقى لدينا 5+5+2 = 12 كما ذكرت سابقاً و الرقم 12 عبارة عن 3 = 2+1

الآن بعد أن اختزلنا عملية الضرب السابقة بقي لدينا 5 من الحد الأول و 6 من الحد الثاني و 30 من النتيجة فأصبحت بذلك عملية الضرب 56589 × 983678 = 55665354342

مختزلة و مبسطة إلى الشكل التالي:

5 ×6 = 30

و الرقم 30 عبارة عن 3 +0 = 3

إذاً عملية الضرب صحيحة.

الرقم السحري 22:

إختر أي رقم يتألف من 3أعداد شريطة ألا تكون تلك الأعداد متماثلة:

مثلاً الرقم 365

شكل من الأعداد المكونة للرقم الذي اخترته (365) كل الاحتمالات الممكنة المكونة من عددين.

36 - 35 - 63 - 53 - 65 - 56

اجمع هذه الأرقام مع بعضها البعض:

36 + 35 + 63 + 53 + 65 + 56 = 308

اجمع أعداد الرقم الذي اخترته مع بعضها البعض أي الرقم (365)

3 + 6 + 5 = 14

قم بقسمة مجموع الأرقام الثنائية الت شكلتها من الرقم 365 الذي اخترته على مجموع الرقم الأصلي أي 14 و ستكون النتيجة 22.

308 ÷14 = 22

أي رقم ثنائي ينتهي بالعدد 9 فإنه يمثل حاصل جمع كل من العددين الذين يشكلانه مضافاً إلى حاصل ضرب العددين الذين يشكلانه.

19 = (1 × 9) + (1 + 9)

9 +10 = 19

29 = (2 × 9) + (2 + 9)

18 + 11 = 29

39 = (3 × 9) + (3 + 9)

$27 + 12 = 39$

$49 = (4 \times 9) + (4 + 9)$

$59 = (5 \times 9) + (5 + 9)$

$69 = (6 \times 9) + (6 + 9)$

$79 = (7 \times 9) + (7 + 9)$

$89 = (8 \times 9) + (8 + 9)$

$99 = (9 \times 9) + (9 + 9)$

لاحظ كذلك أن:

$109 = (10 \times 9) + (10 + 9)$

$119 = (11 \times 9) + (11 + 9)$

$129 = (12 \times 9) + (12 + 9)$

الرياضيات الذكية:

لدينا 25 فريق كرة قدم و طلب منا أن نحدد عدد المباريات التي يتوجب على هذه الفرق أن تلعبها مع بعضها البعض حتى نتوصل إلى بطل للدوري بحيث يخرج الفريق من الدوري عند أول خسارة يخسرها.

المعطيات:

25فريق

يخرج الفريق من الدوري عند أول خسارة.

في كل مباراة لابد من خاسر و رابح ولا مجال للتعادل.

كم عدد المباريات التي يتطلبها التوصل إلى بطل لهذا الدوري ؟

ملاحظة : حاول حل هذه المسألة بالطرق التي تراها مناسبة قبل أن تنظر إلى الإجابة.

الحل التقليدي:

أولاً لدينا 25 فريق نأخذ منها 24 فريق و نقسمهم إلى مجموعتين كل مجموعة تتألف من 12 فريق و هكذا تلعب هاتين المجموعتين 12 مباراة و نخرج الفريق رقم 25 بالقرعة العلنية مؤقتاً لأنه لا نظير له , و يمكن أن نخرج بطل الموسم الماضي تكريماً له.

12فريق ×12 فريق أي 12 مباراة

يفوز 12 فريق و يخسر 12 فريق

تلعب الفرق الفائزة الإثنى عشر مع بعضها 6 مباريات

تفوز 6 فرق و تخسر 6 فرق

تلعب الفرق الفائزة الست مع بعضها 3 مباريات

تفوز 3 فرق و تخسر 3 فرق

الآن ندخل الفريق رقم 25 إلى هذه المجموعة فيصبح لدينا 4 فرق

تلعب هذه الفرق الأربعة مع بعضها مباراتين

يفوز فريقين و يخسر فريقين

يلعب الفريقين الفائزين مع بعضهما المباراة النهائية.

الآن لدينا 12 مبارة + 6مباراة +3مباريات + مباريتين + المباراة النهائية

24 = 1+2+3+6+ 12مباراة.

طريقة الحل الذكية:

مفتاح هذه الطريقة هو التركيز على الفرق الخاسرة و ليس على الفرق الرابحة.

كم خاسراً يتوجب أن يكون في دوري يتألف من 25 فريق حتى يكون هنالك بطل واحد إذا كان الفريق يخرج من الدوري بعد خسارة واحدة ؟

الإجابة 24 خاسر بالطبع.

كم مباراة يتوجب لعبها حتى يكون هنالك 24 خاسر ؟

الإجابة 24 مباراة.

إذاً كم مباراة يتوجب على 25 فريق أن يلعبوها حتى يكون هنالك رابح واحد ؟

الإجابة 24 مباراة.

الرقم السحري 1001

إضرب الرقم السحري 1001 بأي رقم يتألف من 3 أعداد.

1001 × 111 = 111111

1001× 222 = 222222

1001 ×333 = 333333

1001 ×444 = 444444

1001 × 555 = 555555

1001 ×666 = 666666

1001 ×777 = 777777

1001 × 888 = 888888

1001 ×9 = 999999

من أشهر الرياضيين الغربيين الذين اهتموا بدراسة العلاقة الخفية بين الأرقام الرياضي كارل فريدريك غوس. Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

رفع العدد لقوة معينة:

نعني بمفهوم الرفع للقوة أن هذا الرقم مضروب بنفسه عدد معين من المرات و نعبر عن الرفع للقوة بوضع رقم صغير فوق ذلك الرقم أو بوضع إشارة ^ أمام ذلك الرقم.

مثال:

9^4 لاحظ كيف وضعنا 4 صغيرة فوق العدد 9 و نعني بهذه الأربعة ان العدد 9 مضروب في نفسه 4 مرات أي أن 99× 9× 9× 9 =^{4}

$9^4= 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$

$9 \wedge 4 = 9^4= 9 \times 9 \times 9 \times 9$

$9 \wedge 4= 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$

لاحظ إشارة الرفع للقوة^

تربيع الرقم يعني أن نضرب الرقم بنفسه مرتين أما تكعيب الرقم فيعني أن نضرب الرقم بنفسه 3 مرات و نستخدم التربيع في قياس المساحة أما التكعيب فنستخدمه في قياس الأحجام.

لا تخلط بين الرفع للقوة و بين الضرب:

$9 \times 4 = 36$

أما 9^4 فتساوي 6561

إشارة الرفع للقوة في الآلات الحاسبة هي ^ و لكي نحسب نتيجة قوة أي رقم فإننا ندخل ذلك الرقم إلى الآلة الحاسبة ثم نضغط على الزر X^Y ثم ندخل القوة التي نريد أن نرفع ذلك الرقم إليها و نضغط=

مثال : نريد أن نحسب نتيجة 8^9.

ندخل الرقم 8 ثم نضغط الزر X^Y ثم ندخل الرقم 9 و نضغط = فنحصل على النتيجة.

ويمكن حساب القوة أو الأس بأن نضرب الرقم بنفسه عدة مرات فالرقم 8^9 هو عبارة عن ثمانية مضروبة في نفسها 9 مرات أي 8×8×8×8×8×8×8×8×8= 134217728

$8^9 = 134217728$

أو $8 \wedge 9 = 134217728$

و تحوي الآلة الحاسبة كذلك زر خاص لقياس مربع الأعداد وهذا الزر يدعى X^2 ولكي نحسب مربع عدد ما فإننا ندخل ذلك الرقم إلى الآلة الحاسبة ثم نضغط الزر X^2 ثم نضغط الزر=

فتظهر النتيجة على الشاشة.

مثال : نريد أن نحسب نتيجة 8) ^{2}أو 8 ^ 2 أو 8 ×8·)

ندخل الرقم 8 ثم نضغط الزر X^2 ثم نضغط = فنحصل على النتيجة.

هنالك أرقام إذا جمعنا الأعداد المكونة لها ورفعنا نتيجة الجمع لقوة معينة أي إذا ضربنا ناتج الجمع بنفسه عدة مرات فإننا نحصل على تلك الأرقام كما في المثال التالي:

الرقم 81 يتألف من العددين 1 و 8 كما تعلمون و إذا جمعنا هذين العددين 1+8 = 9

الآن إذا رفعنا العدد 9 للقوة 2 أي إذا ضربناه بنفسه مرتين فإننا نحصل على الرقم 81.

$9^2 = (1+8)^2 = 81$

الرقم 81 عبارة عن 1+8 مرفوعة للقوة 2 أي 9 ^ 2 أو 9 مرفوعة للقوة 2 (9 ×9)

طبعاً 1+8 = 9

$17^3 = (4+9+1+3)^3 = 4913$

الرقم 4913 هو عبارة عن 4+9+1+3 مرفوعة للقوة 3 أي 17 ^ 3 أو17 مرفوعة للقوة 3

(17× 17× 17)

بالطبع 4+9+1+3 = 17

8مرفوعة للقوة 3 = 512 و في الوقت ذاته 5+2+1= 8

$17^3 = 4913$

17مرفوعة للقوة 3 = 4913 و في الوقت ذاته فإن 3+1+9+4 = 17

$18^3 = 5832$

18مرفوعة للقوة 3 = 5832 و في الوقت ذاته فإن 2+3+8+5 = 18

$17576 = 26^{3}$

26مرفوعة للقوة 3 = 17576 و في الوقت ذاته فإن 6+7+5+7+1 = 26

$19,683 = 27^{3}$

27مرفوعة للقوة 3 = 19683 و في الوقت ذاته فإن 3+8+6+9+1=27

$2401 = 7^{4}$

7مرفوعة للقوة 4 = 2,401 و في الوقت ذاته فإن 1+صفر+4+2 = 7

$234256 = 22^{4}$

22مرفوعة للقوة 4 = 234256و في الوقت ذاته فإن 6+5+2+4+3+2= 22

$390625 = 25^{4}$

25مرفوعة للقوة 4 = 390625و في الوقت ذاته فإن 5+2+6+صفر+9+3= 25

$614656 = 28^{4}$

28مرفوعة للقوة 4 = 614656و في الوقت ذاته فإن 6+5+6+4+1+6= 28

$1679616 = 36^{4}$

36مرفوعة للقوة4 = 1679616و في الوقت ذاته فإن 6+1+6+9+7+6+1=36

$17210368 = 28^{5}$

28مرفوعة للقوة 5 = 17210368و في الوقت ذاته فإن 8+6+3+0+1+2+7+1=28

$52521875 = 35^{5}$

35مرفوعة للقوة 5 = 52521875و في الوقت ذاته فإن 5+7+8+1+2+5+2+5=35

$60466176 = 36^{5}$

36مرفوعة للقوة 5 = 60466176و في الوقت ذاته فإن 6+7+1+6+6+4+0+6=36

$205962976 = 46^5$

46مرفوعة للقوة 5 = 205962976و في الوقت ذاته فإن 6+7+9+2+6+9+5+0+2=46

$34012224 = 18^6$

18مرفوعة للقوة 6 = 34012224و في الوقت ذاته فإن 4+2+2+2+1+0+4+3=18

$8303765625 = 45^6$

45مرفوعة للقوة 6 = 8303765625 و في الوقت ذاته فإن 5+2+6+5+6+7+3+0+3+8= 45

$24794911296 = 54^6$

54مرفوعة للقوة 6 = 24794911296و في الوقت ذاته فإن 6+9+2+1+1+9+4+9+7+4+2=54

$68719476736 = 64^6$

64مرفوعة للقوة 6 = 68719476736و في الوقت ذاته فإن 6+3+7+6+7+4+9+1+7+8+6=64

$612220032 = 18^7$

18مرفوعة للقوة 7 = 612220032و في الوقت ذاته فإن 2+3+0+0+2+2+2+1+6=18

$10460353203 = 27^7$

27مرفوعة للقوة 7 = 10460353203و في الوقت ذاته فإن 3+0+2+3+5+3+0+6+4+0+1=27

$27512614111 = 31^7$

31مرفوعة للقوة 7 = 27512614111و في الوقت ذاته فإن 1+1+1+4+1+6+2+1+5+7+2=31

$52523350144 = 34^7$

34مرفوعة للقوة 7 = 52523350144 و في الوقت ذاته فإن 4+4+1+0+5+3+3+2+5+2+5 = 34

$271818611107 = 43^7$

43مرفوعة للقوة 7 = 271818611107و في الوقت ذاته
فإن 7+0+1+1+1+6+8+1+8+1+7+2= 43

$1174711139837 = 53^7$

53مرفوعة للقوة 7 = 1174711139837و في الوقت ذاته فإن 53=1+1+7+4+7+1+1+1+3+9+8+3+7

2207984167552= 58^7

58مرفوعة للقوة 7 = 2207984167552و في الوقت ذاته فإن 58=2+2+0+7+9+8+4+1+6+7+5+5+2

6722988818432= 68^7

68مرفوعة للقوة 7 = 6722988818432 و في الوقت ذاته فإن 68=6+7+2+2+9+8+8+8+1+8+4+3+2

20047612231936= 46^8

46مرفوعة للقوة 8 = 20047612231936و في الوقت ذاته فإن 46+2+0+0+4+7+6+1+2+2+3+1+9+3+6

72301961339136= 54^8

54مرفوعة للقوة 8 = 72301961339136 و في الوقت ذاته فإن 54=7+2+3+0+1+9+6+1+3+3+9+1+3+6

248155780267521= 63^8

63مرفوعة للقوة 8 = 248155780267521 و في الوقت ذاته فإن 63=2+4+8+1+5+5+7+8+0+2+6+7+5+2+1

طرح الأرقام المرفوعة للقوة:

احسب نتيجة العملية التالية:

$36^2 - 35^2 =$

35مرفوعة للقوة 3 - 36 مرفوعة للقوة 2

أي 35 ×35 – 36 ×36=

لحساب مثل هذه العمليات نستخدم المعادلة السحرية التالية:

$X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$

العدد الأول مرفوع للقوة 2 ناقص العدد الثاني المرفوع للقوة 2 = العدد الأول ناقص العدد الثاني × العدد الأول + العدد الثاني

طبعاً العلاقة بين القواس المتجاورة ( ) ( ) هي علاقة ضرب كما تعلمون.

الآن لنطبق المعادلة السابقة بشكل عملي:

$36^2 - 35^2 = (36 - 35)(36 + 35) = (1)(71) = 71$

إذاً $^2 - 35^2 = 7136$

ملاحظة:

$(36 - 35)(36 + 35) = (36 - 35) \times (36 + 35)$

العلاقة بين الأقواس المتجاورة ( ) ( ) هي علاقة ضرب

العلاقة بين الأرقام و الرموز المتجاورة هي كذلك علاقة ضرب

مثال آخر:

$40^2 - 30^2 = (40 - 30)(40 + 30) = (10)(70) = 10 \times 70 = 700$

إذاً $^2 - 30^2 = 70040$

ركز جيداً:

$135 = 1^1+3^2+5^3$

1 = 135مرفوع للقوة واحد + 3 مرفوع للقوة 2 + 5 مرفوعة للقوة 3

$175 = 1^1+7^2+5^3$

1 = 175مرفوع للقوة 1 + 7 مرفوعة للقوة 2 + 5 مرفوعة للقوة 3

$518 = 5^1+1^2+8^3$

5 = 518مرفوعة للقوة 1 + 1 مرقوع للقوة 2 + 8 مرفوعة للقوة 3

$598 = 5^1+9^2+8^3$

5 = 598مرفوعة للقوة 1 + 9 مرفوعة للقوة 2 8 + مرفوعة للقوة 3.

$1306 = 1^1+3^2+0^3+6^4$

1 = 1306مرفوع للقوة 1 + 3 مرفوع للقوة 2 + صفر مرفوع للقوة 3 + 6 مرفوعة للقوة 4

$1676 = 1^1+6^2+7^3+6^4$

1 = 1676مرفوع للقوة 1 +6 مرفوعة للقوة 2 +7 مرفوعة للقوة 3 +6 مرفوعة للقوة 4

$2427 = 2^1+4^2+2^3+7^4$

2 = 2427مرفوعة للقوة 1 + 4 مرفوعة للقوة 2 + 2 مرفوعة للقوة 3 + 7 مرفوعة للقوة 4.

لاحظ أننا نرفع الرقم لقوة تماثل الخانة التي يشغلها بادئين من خانة الآلاف و المئات والعشرات و متجهين نحو خانة الآحاد فالرقم الأول نرفعه للقوة 1 و الرقم الثاني نرفعه للقوة 2 و الرقم الثالث نرفعه للقوة 3 و الرقم الرابع نرفعه للقوة 4 و هكذا.

انتبه إلى هذه الأرقام المذهلة:

$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$

الرقم 3435 = 3 مرفوعة للقوة 3 + 4 مرفوعة للقوة 4 + 3 مرفوعة للقوة 3 + 5 مرفوعة للقوة 5.

$438579088 = 4^4 + 3^3 + 8^8 + 5^5 + 7^7 + 9^9 + 0^0 + 8^8 + 8^8$

الرقم 438579088 = 4 مرفوعة للقوة 4 + 3 مرفوعة للقوة 3 +8 مرفوعة للقوة 8 + 5 مرفوعة للقوة 5 + 7 مرفوعة للقوة 7 +9 مرفوعة للقوة 9 + صفر مرفوع للقوة صفر + 8 مرفوعة للقوة 8 + 8 مرفوعة للقوة 8.

إنتبه إلى هذه الأرقام:

العدد 9:

18 = 9+9و 9 ×9 = 81

18هي 81 معكوسة

الرقمين 3 و 24:

3+ 24 = 27

3×24 = 72

72هي 27 معكوسة

الرقمين 2 و 47:

2+ 47 = 49

2 × 47 = 94

49هي 94 معكوسة

الرقم السحري 1,089

إكتشاف الخصائص السحرية للرقم 1089

إختر أي رقم يتألف من 3 أعداد شريطة ألا يكون رقم الآحاد هو ذاته رقم المئات وشريطة ألا ينتهي بالعدد صفرو ليكن الرقم 825 مثلاً.

إعكس هذا الرقم أي نعكس الرقم 825 فنحصل على الرقم 528.

نطرح الرقم من معكوسه كالآتي 825 – 528 = 297

الآن نقلب نتيجة الطرح أي الرقم 297 فنحصل على الرقم 792

الآن أضف الرقم 297 إلى معكوسه أي 792 و انتظر المفاجأة المذهلة

297 + 792 = 1089

لقد حصلنا على الرقم السحري 1089

لنجرب رقماً آخر وهو الرقم 246

لنعكس هذا الرقم فنحصل على الرقم 642

نطرح 642 – 246 = 396

الآن نعكس نتيجة الطرح أي 396 فنحصل على الرقم 693

نجمع 396 +693 = 1089 وهو رقمنا السحري

لنجرب الرقم 522 مثلاً

نعكس هذا الرقم فنحصل على الرقم 225

نطرح 522 – 225 = 297

نعكس نتيجة الطرح أي الرقم 297 فنحصل على الرقم 792

نجمع 297+792 = 1089 وهو رقمنا السحري

إذا كنت تعتقد بأن هنالك خدعة ما في هذا الأمر فيمكنك اختيار أي رقم ثلاثي شريطة ألا يكون منتهياً بالعدد صفر و ألا يكون أحاده مماثلاً لمئاته أي ألا يكون الرقمين الأول و الثالث فيه متماثلين كالرقم 252 أو الرقم 454.

لاحظ أننا إذا ضربنا الرقم السحري 1089 بالعدد 9 فإننا نحصل على الرقم 9801

$$1089 \times 9 = 9801$$

لاحظ أن الرقم 9801 هو عكس الرقم 1089

109989×9 = 989901

لاحظ أن الرقم 989901 هو عكس الرقم 109989

1099989×9 = 9899901 وهو عكس الرقم 1099989

10999989×9 = 98999901 وهو عكس الرقم 10999989

109999989×9 =989999901 وهو عكس الرقم 109999989

1099999989×9 =9899999901 وهو عكس الرقم 1099999989

10999999989×9 =98999999901 وهو عكس الرقم 10999999989

لاحظ كيف تكون النتائج عكس بعض الأرقام عندما نضربها بالعدد 4:

21978×4 = 87912

219978 × 4 = 879912

2199978 × 4 = 8799912

21999978 × 4 = 87999912

219999978 × 4 = 879999912

2199999978 × 4 = 8799999912

n = 30

سلسلة الرفع للقوة 2 التي تبدأ بالرقم 30:

← 30 عبارة عن 3 +0 ← 3 , $3^2 = 9$ لأن $3×3 = 9$

$81 = (9×9) = 9^2$ و هذا الرقم عبارة عن 1 + 8 نرفعهما للقوة 2

← $65 = 1^2+8^2$ عبارة عن 615 = $(5×5 +6×6)$ = $6^2 + {}^2$

← 61 عبارة عن 1 ← 37 = 1+36 = $(1×1 +6 ×6)$ = $6^2 + {}^2$ عبارة عن 7 =$(3× 3+ 7×7)$ $3^2 × {}^2$
← 58 عبارة عن 8 ← $89 = 5^2 + {}^2$ عبارة عن 9 ← $145 = 8^2 + {}^2$ عبارة عن

← $42 = 5^2+4^2 +1^2$ عبارة عن 4 $20 = 2^2 + {}^2$ وهذا الرقم عبارة عن 0 16 = $(4×4 + 0×0)$ $2^2 + {}^2$
و هو عبارة عن 1 $37 = 6^2 + {}^2$ وهو عبارة عن 3 $58 = 7^2 + {}^2$ وهو عبارة عن 898 = $5^2 + {}^2$

لاحظ أننا وصلنا إلى الرقم 89 مرتين علماً أنه في كل مرة نصل فيها إلى هذا الرقم فهذا يعني أننا أكملنا حلقة من هذه العمليات.

n = 31

أي أننا سنبدأ من الرقم 31

الرقم 31 عبارة عن 1 10 = $(3× 3 = 1×1)$ $3^2 + {}^2$ و الرقم عشرة عبارة عن 0 $1^2 + {}^2$

$1 = (1× 1 + 0× 0)$ نرفعه مجدداً للقوة 2 فيصبح 1 ^{2} أي 1 ×1 = 1.

n = 32

أي أننا سنبدأ من الرقم 32

و الرقم 32 عبارة عن 2 3^2+2^2 ($3\times 3 + 2\times 2$) = 13 و الرقم 13 عبارة عن 1 3^2+2^2 أي ($1\times 1 + 3\times 3$) = 10 و الرقم 10 عبارة عن 0) 1^2+0^2 أي $0\times 0 + 1\times 1$) = 1

نرفعه للقوة 2 فيصبح 1 1^2 أي $1\times 1 = 1$

n = 33

أي أننا سنبدأ من الرقم 33

و الرقم 33 عبارة عن 3 3 3^2+3^2 ($3\times 3 + 3\times 3$) = 18 و الرقم 18 عبارة عن 1) $8^2 + 1^2$ أي $1\times 1 + 8\times 8$) = 65 و الرقم 65 عبارة عن 6) $5^2 + 6^2$ أي $6\times 6 + 5\times 5$) = 61

و الرقم 61 عبارة عن 1) 6^2+1^2 أي $1\times 1 + 6\times 6$) = 37 و الرقم 37 عبارة عن 3 7^2+3^3

أي $3\times 3 + 7\times 7 = 58$ و الرقم 58 عبارة عن 5 8^2+5^2 أي $5\times 5 + 8\times 8 = 89$

لاحظ أننا أتممنا الدورة الأولى لأننا وصلنا للرقم 89.

نتابع : و الرقم 89 عبارة عن 8 $9^2 + 8^2$ أي $8\times 8 + 9\times 9 = 145$ و الرقم 145 عبارة عن 1) $5^2+4^2+1^2$ أي $1\times 1 + 4\times 4 + 5\times 5$) = 42 و الرقم 42 عبارة عن 2 4^2+2^2 أي $2\times 2 + 4\times 4 = 20$ و الرقم 20 عبارة عن 2 $0^2 + 2^2$ أي $2\times 2 + 0\times 0 = 4$

نرفع الرقم 4 للقوة 2 فيصبح 4 4^2 أي $4\times 4 = 16$ و الرقم 16 عبارة عن 1 $6^2 + 1^2$ أي $1\times 1 + 6\times 6 = 37$ و الرقم 37 عبارة عن 7 $3^3 + 7^2$ أي $7\times 7 + 3\times 3 = 58$

و الرقم 58 عبارة عن 8 $5^2 + 8^2$ أي $8\times 8 + 5\times 5 = 89$

و بوصولنا إلى الرقم 89 مجدداً نكون قد أتممنا دورة أخرى.

n = 80

أي أننا سنبدأ من الرقم 80

الرقم 80 عبارة عن 8 $0^2 + 8^2$ أي ($8\times 8 + 0\times 0$) = 64 و الرقم 64 عبارة عن 6 $4^2 + 6^2$ أي $6\times 6 + 4\times 4 = 52$ و الرقم 52 عبارة عن 2 $5^2 + 2^2$ أي $2\times 2 + 5\times 5 = 29$ و الرقم 29 عبارة عن 9 $2^2 + 9^2$ أي ($9\times 9 + 2\times 2$) = 85 و الرقم 85 عبارة عن 8 $5^2 + 8^2$ أي ($8\times 8 + 5\times 5$) = 89

و بوصولنا إلى الرقم 89 مجدداً نكون قد أتممنا دورة أخرى.

و الرقم 89 عبارة عن $9^2 8^2$× أي (9×9 + 8 ×8) = 145 و الرقم 145 عبارة عن $1^2+4^2+5^2$ أي (1 × 1 + 4 × 4 + 5 × 5) = 42 و الرقم 42 عبارة عن $2^2 4^2$+ أي (2 × 2 + 4 × 4) = 20 و الرقم 20 عبارة عن 0^2 2^2+ أي 0 × 0 + 2 × 2 = 4

نرفع الرقم 4 للقوة 2 فيصبح 4^2 أي 4 × 4 = 16 و الرقم 16 عبارة عن $1^2 + 6^2$ أي 1×1+ 6 × 6 = 37 و الرقم 37 عبارة عن $3^2 + 7^2$ أي 3 × 3 + 7 × 7 = 58 و الرقم 58 عبارة عن $8^2 + 5^2$ أي 8 × 8 + 5 ×5= 89

و بوصولنا إلى الرقم 89 مجدداً نكون قد أتممنا دورة جديدة.

n = 81

أي أننا سنبدأ من الرقم 81

و الرقم 81 عبارة عن $8^2 + 1^2$ أي (8×8 + 1 × 1)= 65 و الرقم 65 عبارة عن $5^2 + 6^2$

أي 5×5 + 6 × 6 = 61 و الرقم 61 عبارة عن 1^2 × 6^2 أي 1×1 + 6 × 6 = 37 و الرقم 37 عبارة عن $7^2 + 3^2$ أي 7×7 + 3×3 = 58 و الرقم 58 عبارة عن $8^2 + 5^2$ أي 8 × 8 + 5 × 5 = 89 و الرقم 89 عبارة عن $8^2 + 9^2$ أي 8×8 + 9 × 9 = 145 و الرقم 145 عبارة عن $5^2 + 1^2 + 4^2$ أي 5 × 5 + 4 × 4 + 1 × 1 = 42 و الرقم 42 عبارة عن $2^2 + 4^2$

أي 2×2 + 4×4= 20 و الرقم 20 عبارة عن 40 = 2 × 2 + 0 × 0 = $2^2 + 0^2$

نرفع الرقم 4 للقوة 2 فيصبح 4^2 أي 4×4= 16 و الرقم 16 عبارة عن $1^2 + 6^2$ أي 1 × 1 + 6 × 6 = 37 و الرقم 37 عبارة عن $7^2 + 3^2$ أي 7 × 7 + 3 × 3 = 58 و الرقم 58 عبارة عن $8^2 + 5^2$ أي 8 × 8 + 5 × 5 = 89

و بوصولنا إلى الرقم 89 مجدداً نكون قد أتممنا دورة جديدة.

n = 82

أي أننا سنبدأ من الرقم 82

الرقم 82 عبارة عن ($2^2 + 8^2$ أي 2 × 2 + 8 × 8) = 68 و الرقم 68 عبارة عن $8^2 + 6^2$

أي (8 × 8 +6 × 6) = 100 و الرقم 100 عبارة عن ($1^2 + 0^2 + 0^2$ أي 1 × 1 + 0 × 0 + 0 × 0) = 1 نرفعه للقوة 2 فيصبح 1^2 أي 1 × 1 = 1

n = 85

أي أننا سنبدأ من الرقم 85

الرقم 85 عبارة عن $8^2 + 5^2$ أي $(8\times 8 + 5\times 5) = 89$ و الرقم 89 عبارة عن 9^2+8^2

أي $9\times 9 + 8\times 8 = 145$ و الرقم 145 عبارة عن $1^2+4^2+5^2$ أي $5\times5 + 4\times4 + 1\times1 = 42$ و الرقم 42 عبارة عن 4^2+2^2 أي $4\times 4 + 2\times 2 = 20$ و الرقم 20 عبارة عن 2^2+0^2 أي $0\times 0 + 2\times 2 = 4$ نرفعه للقوة 2 فيصبح 4^2 أي $4\times 4 = 16$ و الرقم 16 عبارة عن $1^2 + 6^2$ أي $1\times 1 + 6\times 6 = 37$ و الرقم 37 عبارة عن $3^2 + 7^2$ أي $3\times 3 + 7\times 7 = 58$ و الرقم 58 عبارة عن 5^2+8^2 أي $8\times8 + 5\times5 = 89$

و بوصولنا إلى الرقم 89 مجدداً نكون قد أتممنا دورة.

الرقم 89 هو جزء من الرقم السحري 1089

ظاهرة العدد 1

هذه الظاهرة حيرت علماء الرياضيات ومامن أحد يمتلك تفسيراً لهذه الظاهرة فعندما نقوم باختيار أي رقم ومن ثم نقوم بقسمة العدد الزوجي number even على 2 وضرب العدد الفردي odd number بالعدد 3 ومن ثم إضافة واحد فإننا نحصل في النهاية على العدد 1.

الرقم 12 مثلاً هو رقم زوجي لذلك فإننا نقسمه على 2

$12 \div 2 = 6$ و العدد 6 هو كذلك عدد زوجي لذلك نقسمه على 2 فنحصل على العدد 3 وهو عدد فردي لذلك فإننا نضربه بالعدد 3 و نضيف إلى الناتج العدد 1

$3\times 3 + 1 = 10$ و العدد 10 زوجي لذلك نقسمه على 2 فنحصل على العدد 5 وهو عدد فردي لذلك نضربه بالعدد 3 و نضيف العدد 1 إلى النتيجة $5\times 3 + 1 = 16$ و الرقم 16 هو رقم زوجي لذلك فإننا نقسمه على 2:

$16 \div 2 = 8$ و العدد 8 هو عدد زوجي لذك فإننا نقسمه على 2 فتكون النتيجة 4 وهو عدد زوجي لذلك فإننا نقسمه على 2 فتكون النتيجة 2 وبما أنها عدد زوجي فإننا نقسمها على 2 فتكون النتيجة 1.

إن جميع الأرقام التي جربت منذ العام 1930 و لغاية هذا اليوم قد بينت صحة هذه النظرية و بالرغم من استخدام الحواسب العملاقة فإن علماء الرياضيات لم يتمكنوا من الوصول إلى قول فصل و قد أعلنت الكثير من الهيئات العلمية عن جوائز كبيرة لمن يثبت صحة هذه النظرية بشكل مطلق أو لمن يأتي برقم لا تنطبق عليه هذه النظرية و تعرف هذه المعضلة الرياضية عالمياً باسم معضلة n+1 problem .3

علماً أن جميع المحاولات كانت تنتهي بالأعداد 4–2–1.

الأعداد الكاملة: Perfect Numbers

يروج البعض لفكرة أن كل ما في الرياضيات كامل و تام و مطلق و مثبت و هذا الكلام دليل جهل فالكثير من المسلمات الرياضية غير مثبتة بل إن من الممكن أن تكون خاطئة كما أن العناصر المكونة للرياضيات أي الأرقام ليست متساوية من حيث الكمال فهنالك أرقام أكثر كمالاً من الأرقام الأخرى لا بل إن هنالك أرقام غير تامة أو غير كاملة و هنالك أرقام تامة

perfect numbers الرقم التام هو الرقم المساوي لمجموع عوامله المكونة و أصغر الأرقام التامة هو الرقم ستة 6 لأن 1 +2+3 = 6.

و نحن نقصد بالعوامل المكونة للرقم بانها الأعداد التي إذا ضاعفناها عدة مرات و صلنا إلى ذلك العدد

1 ×6 = 6

2 ×3 = 6

3 ×2 = 6

و كذلك فإن 1 +2+3 = 6

جبيع مكونات هذا الرقم إذا ضربت ببعضها عدداً معيناً من المرات أنتجت ذلك الرقم.

الرقم الثاني التام هو الرقم 28 لأن 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14

طبعاً 1 ×28 = 28

2 ×14 = 28

7 ×4 = 28

جبيع مكونات هذا الرقم إذا ضربت ببعضها عدداً معيناً من المرات أنتجت ذلك الرقم.

و الرقم التام الثالث هو الرقم 496 لأن 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248

طبعاً 1 ×496 = 496

2 ×248 = 496

4 ×124 = 496

8 × 62 = 496

16 ×31 = 496

جبيع مكونات هذا الرقم إذا ضربت ببعضها عدداً معيناً من المرات أنتجت ذلك الرقم.

و الرقم التام الرابع هو الرقم 8128 و هو آخر رقم تام توصل إليه اليونانيين القدماء و في الحقيقة فإن اليوناني إقليدس Euclid هو من وضع نظرية في كيفية التوصل إلى الأرقام التامة .و الرقم التام الخامس هو الرقم 33550336 و الرقم التام السادس هو الرقم 8589869056

و الرقم التام السابع هو الرقم 137438691328

لاحظ أن جميع الأرقام التامة تنتهي بالعدد 6 أو بالرقم 28

الأعداد المتحابةamicable

يقال عن رقمين أنهما رقمين متحابين إذا كان مجموع قواسم أحدهما يساوي الآخر.

مثال الرقمين 220 و 284 فالأعداد التي يمكن قسمة الرقم 220 عليها هي:

2-1- 4- 5- 10- 11- 20- 22- 44- 55

220 ÷55 = 4

220 ÷ 44 = 5

220 ÷22 = 10

220 ÷11 = 20

220 ÷ 10 = 22

220 ÷5 = 44

220 ÷4 = 55

220 ÷2 = 110

220 ÷1 = 220

و الآن 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284

الآن نأتي للرقم الثاني وهو الرقم 284 و قواسم هذا الرقم هي 1 – 2 -4 – 71 – 142

1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

و في القرن السابع عشر إكتشف عالم الرياضيات بيير دي فيرمات Pierre de Fermat رقمين متحابين جديدين و هما الرقم 17296 و الرقم 18416

الآن إذا جمعنا قواسم الرقم الأول 17296 فإننا نحصل على الرقم الثاني 18416

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 23 + 46 + 47 + 92 + 94 + 184 + 188 + 368

+ 376 + 752 + 1081 + 2162 + 4324 + 8648 = 18416

و إذا جمعنا قواسم الرقم الثاني 18416 فإننا نحصل على الرقم الأول.

1+2+4+8+16+1151+2302+4604+920 = 17296

مجموعة أخرى من الأرقام المتحابة:

1184 والرقم 1210

2620 والرقم 2924

5020والرقم 5564

6232والرقم 6368

10744والرقم 10856

9363584والرقم 9437056

111448537712والرقم 118853793424

تتابع فيبوناتشي Fibonacci sequence

سلسلة فيبوناتشي Fibonacci series

سلسلة فيبوناتشي عبارة عن سلسلة من الأرقام يدعى كل رقم فيها برقم فيبوناتشي Fibonacci number و يكون كل رقم في هذه السلسلة مساوياً لمجموع الرقمين الذين يسبقانه مثلاً:

1-1– 2 – 3 – 5 – 8 ... فالرقم 2 = 1+1 و الرقم 3= 1+2 و الرقم 5= 2+3 و الرقم 8=5+3 و هكذا و مكتشف هذه السلسلة هو الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي (Leonardo Fibonacci (c.1170–c.1250 و كلمة فيبوناتشي تعني (ابن بوناتشي Bonacci) و قد ذكر فيبوناتشي اكتشافه هذا في كتابه الذي أسماه Liber Abaci الذي وضعه في العام 1202 و الذي يعتبر من أهم الكتب في تاريخ أوروبا.

وقد استخدم فيبوناتشي الأرقام العربية – الهندية Hindu–Arabic numerals لأول مرة في أوروبا وهي الأرقام التي اعتمدت بشكل رسمي بعد ذلك.

لقد كان فيبوناتشي تاجراً ولم يكن رجل دين أو عالم رياضيات و قد أمضى سنوات طويلة في العالم الإسلامي كما أنه قرأ عدداً كبيراً من الكتب العربية و إليه يرجع الفضل في إدخال الأرقام العربية إلى أوروبا و ذلك في كتابه Liber abaci الذي تقدم ذكره وفي العام 1857 طبع هذا الكتاب تحت عنوان Scritti di Leonardo Pisano .

إن سر اعتبار كتاب فيبوناتشي كأحد أهم الكتب في تاريخ أوروبا يعود إلى مقدمة الكتاب التي قال فيها " هذه هي الأرقام الهندية التسعة 123456789 و التي باستخدامها و باستخدام الرمز 0 الذي يدعوه العرب الصفر zephirum يمكن كتابة أي رقم " و بذلك فقد عرفت أوروبا لأول مرة في تاريخها النظام العشري decimal و استخدام الصفر as-sifr أو zephirum

الذي اشتقت منه كلمة Zero و كلمة صفر العربية أتت من الكلمة السنسكريتية sunya و تعني الفراغ أو الخواء.

1- 2- 3- 5- 8- 13- 21- 34- 55- 89- 144- 233- 377

الدورة اللانهائية للأرقام الرباعية:

إختر رقماً رباعياً (يتألف من أربعة أعداد) شريطة ألا تكون الأعداد المكونة له متماثلة كما هي حال الرقم 5555 أو الرقم 9999.

أعد ترتيب الأعداد المكونة لهذا الرقم بحيث تحصل على أعلى رقم ممكن.

أعد ترتيب الأعداد المكونة لهذا الرقم بحيث تحصل على أصغر رقم ممكن.

إطرح هذين الرقمين من بعضهما البعض.

كرر هذه العملية إلى أن تصل إلى الرقم 6147 و بعد ذلك فإنك ستصل إلى دورة لا نهائية من العمليات الحسابية.

التطبيق العملي:

إختر رقماً رباعياً (يتألف من أربعة أعداد) شريطة ألا تكون الأعداد المكونة له متماثلة كما هي حال الرقم 5555 أو الرقم 9999.

نختار مثلاً الرقم 3203

أعد ترتيب الأعداد المكونة لهذا الرقم بحيث تحصل على أعلى رقم ممكن.

الرقم 3320 هو أكبر رقم يمكن تشكيله من هذه الأعداد.

أعد ترتيب الأعداد المكونة لهذا الرقم بحيث تحصل على أصغر رقم ممكن.

أصغر رقم يمكن تشكيله من هذه الأعداد هو الرقم 0233

إطرح هذين الرقمين من بعضهما البعض.

3320-0233= 3087

لدين الآن ناتج عملية الطرح وهو الرقم 3087

الرقم الأعلى الذي يمكن تشكيله من أعداد هذا الرقم هو الرقم 8730

الرقم الأدنى الذي يمكن تشكيله من أعداد هذا الرقم هو 0378

8730 -0378 = 8352

لدينا الآن ناتج عملية الطرح وهو الرقم 8352

الرقم الأعلى الذي يمكن تشكيله من أعداد هذا الرقم هو 8532

الرقم الأدنى الذي يمكن تشكيله من أعداد هذا الرقم هو 2358

6174 = 2358 – 8532هنا وصلنا للرقم 6174 الذي يشكل بداية الدورة المغلقة اللانهائية.

لدينا الآن ناتج عملية الطرح وهو الرقم 6174

الرقم الأعلى الذي يمكن تشكيله من أعداد هذا الرقم هو 7641

الرقم الأدنى الذي يمكن تشكيله من أعداد هذا الرقم هو 1467

6174 = 1467 – 7641هنا وصلنا مجدداً للرقم 6174 الذي يشكل بداية الدورة المغلقة اللانهائية.

الأرقام الخمسة السحرية:

1 – 153 – 370 – 371- 407

تتميز هذه الأرقام السحرية بأن مجموع مكعب الأعداد المكونة لها مساوٍ لها بمعنى ان مكعب العدد 1 أي $1^3 = 1$ و مجموع مكعب الأعداد 3 و 5 و 1 يساوي 153

$$1^3+5^3+3^3 = 1\times1\times1 + 5\times5\times5 + 3\times3\times3 = 1 + 125 + 27 = 153$$

كما أن مجموع مكعب الأعداد 3 و 7 و 0 يساوي 370

$$3^3+7^3+0^3= 3\times3\times3 + 7\times7\times7 + 0 = 27 + 343 = 370$$

و كذلك فإن مجموع مكعب الأعداد 3 و 7 و 1 يساوي 371

$$3^3 + 7^3 + 1^3= 3\times3\times3 + 7\times7\times7 +1\times1\times1= 371$$

كما أن مجموع مكعب الأعداد 4 و 0 و 7 يساوي 407

$$4^3+ 0^3+7^3 = 4\times4\times4+0\times0\times0+7\times7\times7 = 704$$

انتبه جيداً إلى العلاقة السحرية بين هذه الأرقام:

$6205 = 69^2 + 38^2$ (69× 69 + 38 ×38)

و في الوقت ذاته فإن الرقم 3869 الذي يتكون من الرقمين 69 و 38 = $05^2 + 62^2$ (05 × 05 + 62 ×62) = 3869

الرقم $5965 = 77^2 + 06^2$ (77 ×77 + 06 ×06)

وفي الوقت ذاته فإن الرقم 7706 الذي يتكون من الرقمين 77 و 06 = $59^2 + 65^2$ (59 ×59 + 65 ×65)= 7706

الأرقام المتشقلبة Palindromic Numbers

هنالك بعض الكلمات و العبارات التي يمكن أن نقرأها بشكل معكوس دون أن يتغير معناها كما هي الحال في كلمة رادار Radar و كلمة (Reviver العائد للوعي) , و كلمة الدوار Rotator و عبارة لايوجد ليمون و لا يوجد بطيخ NO Lemons, NO Melon

و غيرها , و هنالك أرقام متشقلبة يمكن أن نقرأها بشكل معكوس كالرقم 303 و الرقم 555 و غيرها و يمكن الحصول على هذه الأرقام إنطلاقاً من أي رقم و ذلك بأن نعكس هذا الرقم ثم نجمع هذا الرقم مع معكوسه و إذا لم نتوصل إلى رقم متشقلب يمكننا أن نكرر الخطوة مرة ثانية كما في هذا المثال:

لدينا الرقم 23 نريد أن نصنع من خلاله رقماً متشقلباً لذلك فإننا نعكسه فيصبح 32 ثم نجمع العدد 23 مع معكوسه 23 + 32 = 55 و هو رقم متشقلب.

لدينا الرقم 57 و نريد أن نصنع منه رقماً متشقلباً لذلك فإننا نعكسه فيصبح 75 ثم نجمعه مع معكوسه 57 + 75 = 123 لكن هذا الرقم ليس رقماً متشقلباً لأننا لو عكسناه لأصبح 321

لذلك فإننا ننفذ الخطوات السابقة من جديد ونعكس الرقم 123 فيصبح لدينا الرقم 321

ثم نجمع هذين الرقمين 132 +123 = 363 وهو كما نرى رقم متشقلب.

و أحياناً نحتاج إلى 3 عمليات عكس و 3 عمليات جمع حتى نحصل على رقم متشقلب:

86 + 68=154 154 + 451=605 605 + 506=1111

وقد نحتاج إلى عدد أكبر من الخطوات في أرقام اخرى.

الدائرة المغلقة

لنختر رقماً ما بطريقة عشوائية و ليكن الرقم 352

لنحسب مكعب الأعداد التي تشكل هذا الرقم

$2^3+5^3+3^3 = (2\times2 \times2+ 5\times5 \times5 +3 \times3 \times 3) = 8 + 125 + 7 = 160$

لنكرر هذه العملية و نحسب مكعب الأعداد المكونة للرقم 160

$1^3+6^3+0^3 = (1\times1\times1+6\times6\times6+0\times0\times0) = 1 +216 + 0 = 217$

لنكرر هذه العملية و نحسب مكعب الأعداد المكونة للرقم 217

$2^3+1^3+7^3 = (2\times2\times2+ 1\times1\times1+7\times7\times7) = 8 + 1 + 343= 352$

لقد وصلنا إلى الرقم ذاته الذي اخترناه و بدأنا منه وهو الرقم 352

لنجرب رقماً آخر و ليكن الرقم 123و الآن لنحسب مربع الأعداد التي تشكل هذا الرقم و ليس مكعبها:

$1^2+2^2+3^2 =(1\times1+ 2\times2+ 3\times3) = 1 +4 + 9 = 14$

لنكرر هذه العملية و نحسب مربع الأعداد المكونة للرقم 14

$1^2+4^2= (3\times3 +4\times4) = 1 + 16 = 17$

لنكرر هذه العملية و نحسب مربع الأعداد المكونة للرقم 17

$1^{2+} 7^2= (1\times1+ 7\times7) = 1 + 49 = 50$

لنكرر هذه العملية و نحسب مربع الأعداد المكونة للرقم 50

$0^2+ 5^2 = (0\times0 + 5\times5) = 0 + 25 = 25$

لنكرر هذه العملية و نحسب مربع الأعداد المكونة للرقم 25

$5^2 + 2^2 = 5 \times5 + 2\times2 = 25 + 4 = 29$

لنكرر هذه العملية و نحسب مربع الأعداد المكونة للرقم 29

$2^2 + 9^2 = 2 \times 2 + 9 \times 9 = 4 + 81 = 85$

لنكرر هذه العملية و نحسب مربع الأعداد المكونة للرقم 85

$5^2 + 8^2 = 5 \times 5 + 8 \times 8 = 25 + 64 = 89$

لنكرر هذه العملية و نحسب مجموع مربع الأعداد المكونة للرقم 89

$9^2 + 8^2 = 9 \times 9 + 8 \times 8 = 81 + 64 = 145$

لنكرر هذه العملية و نحسب مجموع مربع الأعداد المكونة للرقم 145

$5^2 + 4^2 + 1^1 = 5 \times 5 + 4 \times 4 + 1 \times 1 = 25 + 16 + 1 = 42$

لنكرر هذه العملية و نحسب مجموع مربع الأعداد المكونة للرقم 42

$2^2 + 4^2 = 2 \times 2 + 2 \times 2 = 4 + 16 = 20$

لنكرر هذه العملية و نحسب مجموع مربع الأعداد المكونة للرقم 20

$0^2 + 2^2 = 0 \times 0 + 2 \times 2 = 4$

لنكرر هذه العملية و نحسب مجموع مربع الأعداد المكونة للعدد 4

$4^2 = 4 \times 4 = 16$

لنكرر هذه العملية و نحسب مجموع مربع الأعداد المكونة للرقم 16

$6^2 + 1^2 = 6 \times 6 + 1 \times 1 = 37$

لنكرر هذه العملية و نحسب مجموع مربع الأعداد المكونة للرقم 37

$7^2 + 3^2 = 7 \times 7 + 3 \times 3 = 49 + 9 = 58$

لنكرر هذه العملية و نحسب مجموع مربع الأعداد المكونة للرقم 58

$8^2 + 5^2 = 8 \times 8 + 5 \times 5 = 64 + 35 = 89$ لاحظ أن الرقم 89 قد مر معنا سابقاً و هذا يعني أننا ندور في حلقة مغلقة تتكرر إلى مالا نهاية.

حلقة الجداء المتسلسل ! A Factorial Loop

نرمز للجداء المتسلسل بإشارة التعجب ! و الجداء المتسلسل هو حاصل ضرب جميع الأرقام المتسلسلة مع بعضها البعض فعلى سبيل المثال فإن الجداء المتسلسل للعدد 4 أي 4!

يساوي 1 × 2 × 3 × 4 = 24

الآن ماهو الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 145

1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145

1 = 1× 1الجداء المتسلسل للعدد 1

24 = 4× 3× 2× 1وهو الجداء المتسلسل للعدد 4

120 = 5×4× 3× 2× 1و هو الجداء المتسلسل للعدد 5

الآن نجمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 145

1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145

هل كل شيئ واضح ؟

الآن ماهو الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 40585

4! + 0! + 5! + 8! + 5! = 24 + 1 + 120 + 40320 + 120 = 40585

24 = 4× 3× 2× 1هو الجداء المتسلسل للعدد 4

الجداء المتسلسل للصفر هو 1

120 = 5×4× 3× 2× 1هو الجداء المتسلسل للعدد 5

40320 = 8×7×6×5×4× 3× 2× 1هو الجداء المتسلسل للعدد 8

الآن سنعود للعب بالأرقام من جديد و ذلك بسؤال صغير عن الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 871

40320 = 8×7×6×5×4× 3× 2× 1هو الجداء المتسلسل للعدد 8

5040 =7×6×5×4× 3× 2× 1هو الجداء المتسلسل للعدد 7

$8! + 7! + 1! = 40320 + 5040 + 1 = 45361$

هنا حدثت مشكلة لابد أنكم انتبهتم إليها و تتخلص هذه المشكلة في أن حاصل جمع الجداء المتسلسل للرقم 871 لم يكن الرقم 871 بل كان رقماً مختلفاً وهو الرقم 45361

الآن المفاجئة المدهشة:

ماهو حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 45361

$24 = 4\times 3\times 2\times 1$ الجداء المتسلسل للعدد 4

$120 = 5\times 4\times 3\times 2\times 1$ الجداء المتسلسل للعدد 5

$6 = 3\times 2\times 1$ الجداء المتسلسل للعدد 3

$720 = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$ الجداء المتسلسل للعدد 6

$4! + 5! + 3! + 6! + 1! = 24 + 120 + 6 + 720 + 1 = 871$

حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 45361 هو الرقم 871

أليس هذا مدهشاً ؟

إن وصولنا للرقم 871 يعني أننا وصلنا إلى حلقة مغلقة لأننا إذا بحثنا عن حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 871 فإن النتيجة ستكون 45361 و لو بحثنا عن حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 45361 فإن النتيجة تكون 871.

الآن ماهو حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 872

$40320 = 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$ هو الجداء المتسلسل للعدد 8

$5040 = 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$ هو الجداء المتسلسل للعدد 7

$2 = 1\times 2$ الجداء المتسلسل للعدد 2

$8! + 7! + 2! = 40320 + 5040 + 2 = 45362$

إذاً حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 872 هو 45362

الآن ماهو حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 45362

$4! + 5! + 3! + 6! + 2! = 24 + 120 + 6 + 720 + 2 = 872$

إذاً حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 45362 هو 872

ماهو حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 169

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880$ هو الجداء المتسلسل للعدد 9

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ وهو الجداء المتسلسل للعدد 6

$1! + 6! + 9! = 363601$

$362880 + 720 + 1 = 363601$ هو حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 169

الآن ماهو حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 363601

$3! + 6! + 3! + 6! + 0! + 1!$

$= 6 + 720 + 6 + 720 + 1 + 1 = 1454$

إذاً حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 169 هو 1454

الآن ماهو حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 1454

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ الجداء المتسلسل للعدد 4

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ الجداء المتسلسل للعدد 5

$1! + 4! + 5! + 4!$

$= 1 + 24 + 120 + 24 = 169$

إذاً حاصل جمع الجداء المتسلسل للأعداد المكونة للرقم 1454 هو 169

و هكذا فإننا قد دخلنا في حلقة مغلقة جديدة.

مجموع الأعداد المتتابعة:

هناك أرقام هي عبارة عن مجموع عدد من الأعداد المتتابعة كما في هذه الأمثلة:

21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6

الأعداد : 1-2-3-4-5-6 هي أعداد متتابعة و بذات الوقت فإن مجموعها يساوي 21

3 = 1 + 2

22 = 4 + 5 + 6 + 7

الأعداد : 4-5-6 - 7 هي أعداد متتابعة و بذات الوقت فإن مجموعها يساوي 22

23 = 11 + 12

5 = 2 + 3

24 = 7 + 8 + 9

6 = 1 + 2 + 3

25 = 12 + 13

7 = 3 + 4

26 = 5 + 6 + 7 + 8

27 = 8 + 9 + 10

9 = 4 + 5

28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7

10 = 1 + 2 + 3 + 4

29 = 14 + 15

11 = 5 + 6

30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8

12 = 3 + 4 + 5

31 = 15 + 16

13 = 6 + 7

14 = 2 + 3 + 4 + 5

33 = 10 + 11 + 12

15 = 4 + 5 + 6

34 = 7 + 8 + 9 + 10

35 = 17 + 18

17 = 8 + 9

36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8

18 = 5 + 6 + 7

37 = 18 + 19

19 = 9 + 10

38 = 8 + 9 + 10 + 11

20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6

39 = 19 + 20

40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10

و هنالك أرقام لا يمكن تمثيلها بهذا الشكل , أي لايوجد عددين متتابعين مجموعهما يساوي تلك الأرقام كالعدد 2 و الأعداد 4 و 8 و 16 و 32

حاول أن تعثر على عددين متتابعين مجموعهما يساوي أحد الأعداد التالية:

2 – 4 -8 – 16 – 32

لاتقل بأنه يمكن حل هذه المشكلة بالقول بأن 2+2 = 4 لأن 2 و 2 ليسا عددين متتابعين أو بالقول بأن 4+4 = 8 لأن 4 و 4 ليسا عددين متتابعين أو بقولك أن 1+1 = 2 لأن 1 و 1 ليسا عددين متتابعين.

لاحظ أن 9 + 10 + 11=30 و أن 6 + 7 + 8 + 9= 30 كذلك.

الضرب بالرقم 11

مر معنا سابقاً (في الجزء الأول من الرياضيات السحرية) أننا إذا أردنا أن نضرب أي عدد بالرقم 11 فإننا نكرر هذا العدد في النتيجة:

مثال : 7 × 11 = 77 لاحظ كيف كررنا العدد 7

4 ×11 = 44

9 ×11 = 99

و مر معنا كذلك أنه عند ضرب رقم ثنائي (رقم يتألف من عددين كالرقم 76 مثلاً) بالرقم 11 فإننا نجمع العددين الذين يشكلان هذا الرقم و نضع النتيجة بينهما كما في هذه الأمثلة:

45 ×11 =

9 = 4+ 5نضع العدد 9 بين العددين 4 و 5 فتصبح النتيجة

45 ×11 = 495

33 ×11 =

3 +3 = 6

33 ×11 = 363

و الآن ماذا لو كانت نتيجة الجمع أكبر من 9 ؟

إذا كانت نتيجة الجمع أكبر من العدد 9 أي أنها كانت تتألف من عددين فإننا نقوم بالآتي:

-نضع الآحاد بين العددين

-نضيف العشرات إلى رقم المئات في النتيجة

مثال : 78 ×11=

15= 7+8و الرقم 15 أكبر من العدد 9 كما أنه مؤلف من عددين و هما العدد 5 و هو عدد آحاد و الرقم عشرة أو 1 وهو من العشرات.

نضع العدد 5 بين العددين 7 و 8 فتصبح النتيجة 758

الآن نضيف رقم العشرات 1 إلى المئات 7 (1 +7 =8) فتصبح النتيجة النهائية

78 ×11 = 858

مثال آخر : 99 ×11=

9+9= 18

نضع العدد 8 بين العددين 9 و 9 فتصبح النتيجة 989

الآن نضيف رقم العشرات 1 إلى المئات 9 (1 +9 =10) فتصبح النتيجة النهائية

99 ×11 = 1089

ضرب الأرقام الكبيرة بالرقم 11:

كيف نضرب رقماً كبيراً كالرقم 12345 بالرقم 11 ؟

نبدأ من اليمين فننزل الرقم الأول كما هو ثم نبدأ بجمع كل عددين من اليمين مع بعضهما البعض و نضع النتائج تباعاً من اليمين إلى اليسار ثم ننزل العدد الأخير كما هو دون تغيير.

مثال تطبيقي:

11 × 12345 =

نبدأ من اليمين و نضع العدد الأول كما هو في النتيجة وهو هنا العدد 5

إذاً العد د 5 هو أول عدد في النتيجة.

نبدأ بجمع كل عددين مع بعضهما البعض بدءاً من جهة اليمين.

9 = 5+4إذاً العد د 9 هو ثاني عدد في النتيجة.

7 = 4+3إذاً العد د 7 هو ثالث عدد في النتيجة.

5 = 3+2إذاً العد د 5 هو رابع عدد في النتيجة.

3 = 2+1إذاً العد د 3 هو خامس عدد في النتيجة.

نضع آخر عدد كما هو وهو هنا العدد 1

إذاً العد د 1 هو آخر عدد في النتيجة.

و هكذا تصبح النتيجة النهائية كالتالي : 11 × 12345 = 135795

ماذا نفعل عند الجمع إذا كانت نتيجة أحد العددين أكبر من 9 ؟

سأشرح هذه العملية بالتفصيل:

مثال : 11 ×456789=

نبدأ من اليمين و نضع العدد الأول كما هو في النتيجة وهو هنا العدد 9

إذاً العد د 9 هو أول عدد في النتيجة.

نبدأ بجمع كل عددين مع بعضهما البعض بدءاً من جهة اليمين.

9+8 = 17 لاحظ هنا أن نتيجة الجمع أكبر من العدد 9 لذلك نعتبر أن العدد الأول أو الآحاد وهو هنا العدد 7 هو العدد الثاني في النتيجة و يبقى لدينا الرقم 1 و هو رقم عشرات.

إذاً العد د 7 هو ثاني عدد في النتيجة.

تذكر أنه بقي معنا العدد 1 و هو عدد عشرات.

8+7 = 15 و نضيف إليها العدد 1 الذي حملناه من عملية الجمع السابقة فيصبح لدينا

8+7+1 = 16 أو 15 +1 = 16 لاحظ هنا أن نتيجة الجمع أكبر من العدد 9 لذلك نعتبر أن العدد الأول أو الآحاد وهو هنا العدد 6 هو العدد الثالث في النتيجة و يبقى لدينا الرقم 1 و هو رقم عشرات.

إذاً العد د 6 هو ثاني عدد في النتيجة.

تذكر أنه بقي معنا العدد 1 و هو عدد عشرات.

7+6 = 13 و نضيف إليها العدد 1 الذي حملناه من عملية الجمع السابقة فيصبح لدينا

7+6+1 = 14

لاحظ هنا أن نتيجة الجمع أكبر من العدد 9 لذلك نعتبر أن العدد الأول أو الآحاد وهو هنا العدد 4 هو العدد الرابع في النتيجة و يبقى لدينا الرقم 1 و هو رقم عشرات.

إذاً العد د 4 هو ثالث عدد في النتيجة.

11 = 6+5

تذكر أنه بقي معنا العدد 1 و هو عدد عشرات.

11 = 6+5و نضيف إليها العدد 1 الذي حملناه من عملية الجمع السابقة فيصبح لدينا

12 = 1+6+5أو 11 +1 = 12 لاحظ هنا أن نتيجة الجمع أكبر من العدد 9 لذلك نعتبر أن العدد الأول أو الآحاد وهو هنا العدد 2 هو العدد الخامس في النتيجة و يبقى لدينا الرقم 1 و هو رقم عشرات.

9 =4+5و نضيف إليها العدد 1 الذي حملناه من عملية الجمع السابقة فيصبح لدينا 9+1 =10

لاحظ هنا أن نتيجة الجمع أكبر من العدد 9 لذلك نعتبر أن العدد الأول أو الآحاد وهو هنا العدد صفر هو العدد السادس في النتيجة و يبقى لدينا الرقم 1 و هو رقم عشرات.

الآن نضيف الرقم 1 الذي بقي معنا من عمليات الجمع السابقة إلى آخر عدد وهو العدد 4 و نثبته في النتيجة 4+1 = 5

و هكذا تصبح النتيجة كالاتي 11 × 456789= 5024679

لايتوهم أحد ان علينا أن نكرر كل تلك الخطوات السابقة فقد تعمدت تفصيلها و تبسيطها إلى أقصى درجة حتى تصبح مفهومة و إلا فإن هذه العملية بعد أن نفهما لن تستغرق أكثر من بضعة ثواني.

متى يكون رقم ما قابلاً للقسمة على العددين 3 و 9 ؟

إذا كان مجموع الأعداد في ذلك الرقم قابلاً للقسمة على العددين 3 أو 9 فإن ذلك الرقم يكون قابلاً للقسمة على هذين العددين.

مثال توضيحي:

هل الرقم 296357يقبل القسمة على العدد3 و العدد 9 ؟

لنجمع الأعداد المكونة لهذا الرقم 7+5+3+6+9+2 = 32 و هذا الرقم لا يقبل القسمة على العددين 3 و 9 و هذا يعني أن الرقم 296357 لا يقبل القسمة على العددين 3 و 9.

هل الرقم 457875 يقبل القسمة على العدد3 و العدد 9 ؟

لنجمع الأعداد المكونة لهذا الرقم 5+7+8+7+5+4 = 36 و هذا الرقم يقبل القسمة على العددين 3 و 9 و هذا يعني أن الرقم 457875يقبل القسمة على العددين 3 و 9.

هل الرقم 27987 يقبل القسمة على العدد3 و العدد 9 ؟

لنجمع الأعداد المكونة لهذا الرقم 2 + 7 + 9 + 8 + 7 = 33 و هذا الرقم يقبل القسمة على 3 لكنه لا يقبل القسمة على 9 و هذا يعني أن الرقم 27987 يقبل القسمة على العدد 3 لكنه لا يقبل القسمة على العدد 9.

كما تعلمون فإن كل رقم ينتهي بعدد زوجي 2-4-6-8 فإنه يقبل القسمة على العدد 2 كما أن كل رقم ينتهي بالعدد 5 أو الصفر فإنه يقبل القسمة على العدد 5

و إذا كان مجموع آخر عددين من رقم ما قابلاً للقسمة على العدد 4 فهذا يعني أن ذلك الرقم قابل للقسمة على 4.

مثال : هل الرقم 98987698944 قابل للقسمة على 4 ؟

آخر عددين هما 4 و 4 4+4=8 و العدد 8 يقبل القسمة على 4 و هذا يعني أن الرقم

98987698944قابل للقسمة على 4 أي يمكن قسمته دون أن تحوي النتيجة على كسور.

98987698944 ÷4 = 24746924736

و إذا كان مجموع آخر 3 أعداد من رقم ما قابلاً للقسمة على 8 فهذا يعني أن ذلك الرقم قابل للقسمة على 8.

مثال : هل الرقم 99999888 قابل للقسمة على 8 ؟

آخر 3 أعداد هما 8 و 8و8 8 +8+8=24 و 24 تقبل القسمة على 8 و هذا يعني أن الرقم

99999888قابل للقسمة على 8 أي يمكن قسمته دون أن تحوي النتيجة على كسور.

99999888 ÷ 8 = 12499986

قابلية القسمة على 7

كيف نعرف فيما إذا كان رقم ما قابلاً للقسمة على 7 ؟

نقوم بحذف آخر عدد ثم نطرحه مرتين من الرقم المتبقي فإذا كان العدد المتبقي قابلاً للقسمة على 7 فهذا يعني أن هذا الرقم قابل للقسمة على 7.

مثال توضيحي:

هل الرقم 876547 قابل للقسمة على 7 ؟

نحذف آخر عدد و هو هنا العدد 7 فيتبقى لدينا 87654

نطرح العدد الآخير الذي قمنا بحذفه (أي العدد 7) مرتين من الرقم المتبقي و لكي نطرحه مرتين فإننا نضربه بالعدد 2 و نطرح الناتج من الرقم المتبقي.

7 ×2 = 14

87654 -14 = 87640

هل الرقم 87640 قابل للقسمة على 7 ؟

مازلنا غير متأكدين من ذلك فالرقم 87640 ما زال رقماً كبيراً لذلك فإننا نكرر خطوات العملية السابقة بحذافيرها

نحذف آخر عدد و هو هنا الصفر فيتبقى لدينا 8764

نطرح العدد الآخير الذي قمنا بحذفه (أي العدد صفر) مرتين من الرقم المتبقي و لكي نطرحه مرتين فإننا نضربه بالعدد 2 و نطرح الناتج من الرقم المتبقي.

0 ×2 = 0

8764 -0 = 8764نكرر العملية السابقة

نحذف آخر عدد و هو هنا4 فيتبقى لدينا 876

نطرح العدد الآخير الذي قمنا بحذفه (أي العدد4) مرتين من الرقم المتبقي و لكي نطرحه مرتين فإننا نضربه بالعدد 2 و نطرح الناتج من الرقم المتبقي.

2 ×4 = 8

876 – 8 = 868

نكرر العملية السابقة

نحذف آخر عدد و هو هنا8 فيتبقى لدينا 86

نطرح العدد الآخير الذي قمنا بحذفه (أي العدد8) مرتين من الرقم المتبقي و لكي نطرحه مرتين فإننا نضربه بالعدد 2 و نطرح الناتج من الرقم المتبقي.

8 ×2 = 16

86 – 16 = 70

هل الرقم 70 يقبل القسمة على 7 ؟ بالطبع لأن 70 ÷7 = 10

إذاً فالرقم 87654 قابل للقسمة على 7

87654 ÷7 = 12522

هل كل شيء واضح ؟

التفسير الرياضي للعملية السابقة:

تقوم هذه الطريقة على إقتطاع أجزاء من الرقم الذي نريد معرفة فيما إذا كان يقبل القسمة على العدد 7 مع الحرص على أن يكون الجزء المقتطع قابلاً للقسمة على العدد 7 أما الجزء المتبقي فقد يكون قابلاً للقسمة على 7 و قد لا يكون كذلك.

- **إذا كان العدد الأيمن أو عدد الآحاد من الرقم الذي نريد معرفة ما إذا كان قابلاً للقسمة على العدد 7 هو العدد 1 فإننا نحذف ذلك العدد و هذا يعني أن الرقم ككل نقص منه العدد 1 , ثم إننا نضاعف العدد واحد 1×2 = 2 و ننقصه من الرقم المتبقي بعد أن حذفنا العدد واحد , لكن علينا أن ننتبه جيداً هنا إلى أننا حذفنا الآحاد و بقيت خانة العشرات لذلك فإننا عندما أنقصنا العدد 2 فنحن في الحقيقة طرحنا 20 من ذلك الرقم و ليس 2 كما يبدو لنا و تذكرون أننا حذفنا الرقم 1 سابقاً فهذا يعني أننا طرحنا 1 +20 = 21 من الرقم ككل و كما تعلمون فإن 21 قابلة للقسمة على العدد 7 لأن 7 ×3 = 21 و هذا يعني أننا طرحنا رقماً قابلاً للقسمة على 7 و بقي لدينا رقم آخر لا نعرف فيما إذا كان قابلاً للقسمة على 7 أو أنه ليس كذلك.**

إذا كان العدد الأيمن أو عدد الآحاد من الرقم الذي نريد معرفة ما إذا كان قابلاً للقسمة على العدد 7 هو العدد 2 فإننا نحذف ذلك العدد و هذا يعني أن الرقم ككل نقص منه العدد 2 , ثم إننا نضاعف العدد 2×2 = 4 و ننقصه من الرقم المتبقي بعد أن حذفنا العدد 2 , لكن علينا أن ننتبه جيداً هنا إلى أننا حذفنا الآحاد و بقيت خانة العشرات لذلك فإننا عندما أنقصنا العدد 4 فنحن في الحقيقة طرحنا 40 من ذلك الرقم و ليس 4 كما يبدو لنا و تذكرون أننا حذفنا الرقم 2 سابقاً فهذا يعني أننا طرحنا 2 +40 = 42 من الرقم ككل و كما تعلمون فإن 42 قابلة للقسمة على العدد 7 لأن 6 ×7 = 42 و هذا يعني أننا طرحنا رقماً قابلاً للقسمة على 7 و بقي لدينا رقم آخر لا نعرف فيما إذا كان قابلاً للقسمة على 7 أو أنه ليس كذلك.

60 + 3 = 63 = 9 × 7

إذا كان العدد الأيمن أو عدد الآحاد من الرقم الذي نريد معرفة ما إذا كان قابلاً للقسمة على العدد 7 هو العدد 3 فإننا نحذف ذلك العدد و هذا يعني أن الرقم ككل نقص منه العدد 3 , ثم إننا نضاعف العدد 2×3 = 6 و ننقصه من الرقم المتبقي بعد أن حذفنا العدد 3 , لكن علينا أن ننتبه جيداً هنا إلى أننا حذفنا الآحاد و بقيت خانة العشرات لذلك فإننا عندما أنقصنا العدد 6 فنحن في الحقيقة طرحنا 60 من ذلك الرقم و ليس 6 كما

يبدو لنا و تذكرون أننا حذفنا الرقم 3 سابقاً فهذا يعني أننا طرحنا 3 +60 = 63 من الرقم ككل و كما تعلمون فإن 63 قابلة للقسمة على العدد 7 لأن 9 ×7 = 63 و هذا يعني أننا طرحنا رقماً قابلاً للقسمة على 7 و بقي لدينا رقم آخر لا نعرف فيما إذا كان قابلاً للقسمة على 7 أو أنه ليس كذلك.

و هذا الكلام ينطبق على الأرقام التي تبدأ بأي عدد كان.

و الآن هل هنالك أي التباس في هذه المسألة ؟

تعلم دائماً أن تسأل سؤالين هما كيف و لماذا و ألا تكتفي بالسؤال الأول.

لكن علينا أن ندرك في الوقت ذاته أن كثيراً من العمليات الرياضية هي بلا تفسير أو أننا لم نتمكن بعد من تفسيرها فنظرية فيرميت Fermat على سبيل المثال بقيت بلا تفسير علمي لمدة 350 عام إلى أن تمكن أندرو ويليز Andrew Wiles من تفسيرها مؤخراً.

قابلية القسمة على 13

كيف نعرف فيما إذا كان رقم ما قابلاً للقسمة على 13 ؟

نقوم بحذف آخر عدد ثم نطرحه 9 مرات من الرقم المتبقي فإذا كان العدد المتبقي قابلاً للقسمة على 13 فهذا يعني أن هذا الرقم قابل للقسمة على 13.

هل الرقم 5616 قابل للقسمة على 13 ؟

نحذف آخر عدد و هو هنا العدد 6 فيتبقى لدينا 561

نطرح العدد الآخير الذي قمنا بحذفه (أي العدد 6) 9مرات من الرقم المتبقي و لكي نطرحه 9مرات فإننا نضربه بالعدد 9 و نطرح الناتج من الرقم المتبقي.

$6 \times 9 = 54$

$561 - 54 = 507$

بقي لدينا الرقم 507

نحذف آخر عدد و هو هنا العدد 7 فيتبقى لدينا 50

نطرح العدد الآخير الذي قمنا بحذفه (أي العدد 7) 9مرات من الرقم المتبقي و لكي نطرحه 9مرات فإننا نضربه بالعدد 9 و نطرح الناتج من الرقم المتبقي.

$7 \times 9 = 63$

13 = 50 – 63و الرقم 13 قابل للقسمة على 13 و هذا يعني أن الرقم 5616 قابل للقسمة على 13.

5616÷13 = 432

لاحظ هنا أننا في كل مرة نقتطع من الرقم جزءاً معيناً بحيث يكون قابلاً للقسمة على 13 ثم نختبر الجزء المتبقي فإذا كان قابلاً للقسمة على 13 فهذا يعني أن الرقم بـأكمله قابل للقسمة على 13.

فإذا كان الآحاد في ذلك الرقم هو العدد 1 قمنا بحذفه ثم ضربناه بالعدد 9

9 = 9× 1ثم نقوم بطرح العدد 9 من الرقم المتبقي و علينا الانتباه هنا إلى أننا نحذف العدد 9 من عشرات ذلك الرقم أي أنها 90 و ليست 9 . لماذا؟ لأننا حذفنا آحاد هذا الرقم و هو العدد 1 و بالتالي فإن العدد المتبقي هو في الحقيقة من العشرات و ليس من الآحاد و كذلك فإننا نضيف إلى الرقم 90 العدد 1 الذي حذفناه فيصبح مجمل ما قمنا بطرحه 1 + 90 = 91

لاحظ أن الرقم 90 هو من مضاعفات الرقم 13 لأن 7 ×13 = 90

وإذا كان الآحاد في ذلك الرقم هو العدد 2 قمنا بحذفه ثم ضربناه بالعدد 9

18 = 9× 2ثم نقوم بطرح العدد 18 من الرقم المتبقي و علينا الانتباه هنا إلى أننا نحذف العدد 18 من عشرات و مئات ذلك الرقم أي أنها 180 و ليست 18 . لماذا؟ لأننا حذفنا آحاد هذا الرقم و هو العدد 1 و بالتالي فإن العدد المتبقي هو في الحقيقة من العشرات و ليس من الآحاد و كذلك فإننا نضيف إلى الرقم 180 العدد 2 الذي حذفناه فيصبح مجمل ما قمنا بطرحه 2 + 180 = 182

لاحظ أن الرقم 180 هو من مضاعفات الرقم 13 لأن 14 ×13 = 182

قابلية القسمة على 17

كيف نعرف فيما إذا كان رقم ما قابل للقسمة على 17 ؟

نقوم بحذف الآحاد ثم نطرحه 5 مرات من الرقم المتبقي فإذا كان العدد المتبقي قابلاً للقسمة على 17 فهذا يعني أن هذا الرقم قابل للقسمة على 17.

قابلية القسمة على 19

كيف نعرف فيما إذا كان رقم ما قابل للقسمة على 19 ؟

نقوم بحذف الآحاد ثم نضاعفه و نضيفه   إلى الرقم المتبقي فإذا كان العدد المتبقي قابلاً للقسمة على 19 فهذا يعني أن هذا الرقم قابل للقسمة على 19.

عمليات الضرب بالرقم 21:

لكي نضرب أي رقم بالرقم 21 فإننا نضاعف ذلك الرقم مرتين ثم نضرب بعشرة و بعد ذلك نضيف الرقم الأصلي.

= 21 ×37

نضاعف الرقم 37 كالآتي 37 ×2 = 74

نضرب بعشرة 74 ×10 = 740

نضيف الرقم الأصلي أي 37

740 + 37 = 777

21 ×37 = 777

عمليات الضرب بالرقم 31:

لكي نضرب أي رقم بالرقم 31 فإننا نضاعف ذلك الرقم 3 مرات ثم نضرب بعشرة و بعد ذلك نضيف الرقم الأصلي.

= 31 ×43

نضاعف الرقم 43 ثلاثة مرات 3 ×43 = 129

نضرب بعشرة 129 ×10 = 1290

نضيف الرقم الأصلي:

1290 + 43 = 1333

31 ×43 =1333

عمليات الضرب بالرقم 41:

لكي نضرب أي رقم بالرقم 41 فإننا نضاعف ذلك الرقم 4 مرات ثم نضرب بعشرة و بعد ذلك نضيف الرقم الأصلي.

41 ×47 =

نضاعف الرقم 47 4أربع مرات

47 ×4 = 188

نضرب بعشرة

188 ×10 = 1880

نضيف الرقم الأصلي

1880 + 47 = 1927

41 ×47 = 1927

اختصار الكسور:

هنالك طريقة سريعة في اختزال الكسور تعتمد على حذف العدد إذا تكرر في كل من حدي الكسر وبعد ذلك نقوم بقسمة حدي الكسر على عدد واحد إذا قبل كل من حدي الكسر القسمة على ذلك العدد و إليكم هذه الأمثلة التوضيحية مع الشرح المفصل.

ملاحظة : لم تمكننا برمجيات الموقع من كتابة الكسر على شكل خط فوقه رقم و تحته رقم لذلك كتبناه على شكل رقمين تفصل بينهما إشارة/

4 / 1= 46 / 16هنا قمنا باختزال الكسر ببساطة و ذلك بحذف الرقم المتكرر وهو هنا العدد 6 فبقي لدينا العددين 1 و 4.

34 / 7 = 86 / 14 = 71468 / 14714هنا قمنا باختزال الكسر و ذلك بحذف الأرقام التي تكررت في حدي الكسر كالعدد 1 و العدد 4 و العدد 7 – لاحظ أننا لم نحذف العدد 4 الثاني لأنه لم يتكرر في المقام ثم قمنا بعد ذلك باختزال الكسر الناتج و ذلك بقسمة حديه على 2

24 ÷2 = 7

68 ÷2 = 34

4 / 7 = 74242 / 42424 لاحظ هنا أن لدينا العدد 4 تكرر 3 مرات في الأعلى لكنه تكرر مرتين في الأسفل لذلك فقد بقي عدد 4 واحد في الأعلى دون حذف.

لاحظ كذلك أننا لنم نحذف العدد 7 في الأسفل لأنه ليس هنالك 7 في الأعلى.

وبما أنه لايوجد عدد يقبل القسمة على كل من العددين 4 و 7 فإننا لم نتمكن من اختزال هذين العددين.

5 / 2 = 65 / 26 هنا قمنا باختزال الكسر ببساطة و ذلك بحذف العدد المتكرر في كل من البسط و المقام وهو هنا العدد 6 فبقي لدينا العددين 2 و 5.

3 / 2 = 6 / 4 = 6428571 / 4175824 هنالك عددي 4 في الحد العلوي و عدد 4 واحد في الحد السفلي لذلك فإننا حذفنا 4 واحدة و ابقينا على الأخرى و في الحد العلوي لاوجود للعدد 6 لذلك فإننا لم نحذفها.

8/9 = 987804 / 878084 لماذا حذفنا الأعداد 7 و 8 و 0 و 4 ؟

5 / 1 = 95 / 19 هنا قمنا باختزال الكسر ببساطة و ذلك بحذف الرقم المتكرر في كل من البسط و المقام وهو هنا العدد 9 فبقي لدينا العددين 1 و 5.

1/3 = 4285713 / 1428571 لماذا حذفنا الأعداد 4و 2 و 8 و 5 ؟

8 / 5 = 9523808 / 5952380 لماذا حذفنا الأعداد 9 و 2 و 3 و 0 ؟

3 / 2 = 63 / 26 هنا قمنا باختزال الكسر ببساطة و ذلك بحذف الرقم المتكرر في كل من البسط و المقام وهو هنا العدد 6 فبقي لدينا العددين 2 و 3.

7 / 4 = 7848484 / 484848484 في الأعلى لدينا 4 ثمانيات و في الأسفل لدينا 4 ثمانيات لذلك حذفنا العدد 8 و في الأعلى لدينا 5 أربعات بينما في الأسفل لدينا 4 أربعات لذلك فقد أبقينا على عدد 4 واحد لأنه لا نظير له في الأسفل , وفي الأعلى لاوجود للعدد 7 لذلك فقد أبقينا على العدد 7 في الأسفل.

1/3 = 2/6 = 581426 / 2587142 في الأعلى لدينا العدد 2 قد تكرر مرتين أما في الأسفل فهنالك 2 واحدة لذلك فقد حذفنا واحدة و أبقينا على الثانية لأنه لا نظير لها في الأسفل , وفي الأسفل لدينا العدد 6 بينما لا نجد هذا العدد في الأعلى لذلك فإننا لم نحذفه لأنه لا نظير له في الحد الثاني.

1/2 = 4/8 = 98 / 49 هنا قمنا باختزال الكسر ببساطة و ذلك بحذف الرقم المتكرر في كل من البسط و المقام وهو هنا العدد 9 فبقي لدينا العددين 4 و 8 قمنا باختازلهما مرة أخرى إلى 1 و 2.

4/7 = 7424242 / 4242424 في الأعلى لدينا العدد 4 قد تكرر 4 مرات أما في الأسفل فهنالك 3أربعات فقط لذلك فقد حذفنا 3 في الأعلى و أبقينا على 4واحدة لأنه لا نظير لها في الأسفل , وفي الأسفل لدينا العدد 7 بينما لا نجد هذا العدد في الأعلى لذلك فإننا لم نحذفه لأنه لا نظير له في الحد الثاني.

1 = 5/5 = 55 / 55 لا يمكن أن نختذل الكسر بحذف جميع أعداده لذلك فقد حذفنا 5 من كل حد و أبقينا على العدد 5 الثاني ثم قسمنا 5 على 5 فكانت النتيجة 1.

3/4 = 4615348 / 3461535في الأعلى لدينا العدد 3 قد تكرر مرتين أما في الأسفل فهنالك 3واحدة فقط لذلك فقد حذفنا 3 في الأعلى و أبقينا على 3واحدة لأنه لا نظير لها في الأسفل , وفي الأسفل لدينا العدد 4 مكرر مرتين بينما لا نجد في الأعلى سوى 4 واحدة فقط لذلك فإننا حذفنا 4 واحدة و أبقينا على واحدة لأنه لا نظير لها في الحد الثاني.

3/4 = 6/8 = 9230768 / 6923076في الأعلى لدينا العدد 6 قد تكررت مرتين أما في الأسفل فهنالك 6واحدة فقط لذلك فقد حذفنا 6 في الأعلى و أبقينا على 6واحدة لأنه لا نظير لها في الأسفل , وفي الأسفل 8 واحدة بينما لا نجد في الأعلى هذا العدد لذلك فقد أبقينا عليه لأنه لا نظير له في الحد الثاني.

1/2 = 4/8= 998 / 499هنا قمنا باختزال الكسر ببساطة و ذلك بحذف الرقم المتكرر في كل من البسط و المقام وهو هنا العدد 9 فبقي لدينا العددين 4 و 8 قمنا باختازلهما مرة أخرى إلى 1 و 2.

5/6 = 6545454 / 54545445في الأعلى لدينا العدد 5 قد تكرر 4 مرات أما في الأسفل فهنالك 3خمسات فقط لذلك فقد حذفنا 3 خمسات في الأعلى و أبقينا على خمسة واحدة لأنه لا نظير لها في الأسفل , وفي الأسفل لدينا العدد 6 بينما لا نجد هذا العدد في الأعلى لذلك فإننا لم نحذفه لأنه لا نظير له في الحد الثاني.

2/5 = 80 / 32 = 830 / 332قمنا باختزال هذا الكسر بحذف العدد الذي تكرر في كل من البسط و المقام و هو هنا العدد 3 ثم قسمنا العددين الناتجين على العدد 16 فكانت النتيجة 5/2

3/8 = 8311688 / 3116883في الأعلى لدينا العدد 3 قد تكرر مرتين أما في الأسفل فهنالك 3واحدة فقط لذلك فقد حذفنا 3 واحدة فقط في الأعلى و أبقينا على 3واحدة لأنه لا نظير لها في الأسفل , وفي الأسفل لدينا العدد 8 قد تكرر 3مرات أما في الأعلى فليس هنالك إلا ثمانيتين لذلك فقد حذفنا ثمانيتين و أبقينا على واحدة في الأسفل لأنه لا نظير لها في الأعلى.

7/8 = 876712328 / 767123287لماذا حذفنا الأعداد 7و 6 و 2و 3 و 8 ؟

7/16 = 80 / 35 = 880 / 385قمنا باختزال هذا الكسر بحذف العدد 8 الذي تكرر في البسط و المقام و قد أبقينا على العدد 8 في الأسفل لأنه لا مقابل له في الأعلى.

2051282 / 8205128 = 2/8 = 1/4

2343243243 / 4324324324 = 3/4

2/5 = 8/45 = 345 / 138اختزلنا هذا الكسر بحذف العدد 3 الذي تكرر في البسط و المقام.

5384615 / 7538461 = 5/7

54545 / 65454 = 5/6

5/14 = 25/70 = 275/770اختزلنا هذا الكسر بحذف العدد 7 الذي تكرر في البسط و المقام.

84848484 / 848484847 = 4/7

1025641 / 4102564 = 1/4

1/2 = 326 / 163اختزلنا هذا الكسر بحذف العددين 3 و 6 لأنهما تكررا في كل من البسط و المقام.

484 / 847 = 4/7

3243243 / 4324324 = 3/4

6486 / 8648 = 6/8 = 3/4

545 / 654 = 5/6

6486486 / 8644648 = 6/8 = 3/4

4571428 / 5714285 = 4/5

424 / 742 = 4/7

249 / 996 = 24 / 96 = 1/4

48484 / 84847 = 4/7

النسبة و التناسب:

السعر الاعتيادي لجهاز التلفزيون من ماركة معينة هو 100 دولار لكن المعرض A كان يبيع أجهزة التلفزيون أرخص ب 10% من بقية المعارض طيلة العام و خلال الأعياد أعلن ذلك المعرض عن تخفيضات جديدة بلغت 20% على السعر المخفض , ثم أعلن معرض آخر Bعن تخفيضات قدرها 30% على الأسعار.

بدايةً قد يبدو لنا أن كلا العرضين متماثلين فالمعرض الأول أعلن عن تخفيضات قدرها 10% ثم أعلن عن تخفيضات جديدة قدرها 20% على السعر الذي كان يباع مخفضاً بمقدار10. %

10 +20 = 30

أما المعرض B فقد أعلن عن تخفيضات قدرها 30% , لكننا لو تمعنا في الأمر لأدركنا أن المعرض الأول يقدم حسومات قدرها 10% على المبلغ الأصلي فيصبح سعر الجهاز 90 دولار ثم يعلن عن تخفيضات قدرها 20% من السعر المحسوم أي من مبلغ التسعين دولاراً و ليس من السعر قبل الحسم اي من المئة دولار أي أن المعرض الأول حسم 10 دولارات ثم حسم 18 دولار بعد ذلك أي أنه يبيع الجهاز بسعر 72

دولار , أما المعرض الثاني فإنه يعرض تخفيضات قدرها 30% من السعر الأصلي أي من المئة دولار و بالتالي فإنه يبيع الجهاز بسعر 70 دولار أي ارخص بدولارين من المعرض الأول.

شرح مبسط:

سعر الجهاز 100 دولار

المعرض الأول كان يبيع الجهاز أرخص ب 10 % أي أنه كان يبيعه بسعر 90 دولار ثم أعلن عن تخفيض جديد قدره 20 % على التسعين دولار و ليس على المئة دولار فأصبح سعر الجهاز 72 دولار لأن نسبة العشرين بالمئة اقتطعت من التسعين دولار.

المعرض الثاني أعلن عن تخفيضات قدرها 30% على سعر الجهاز أي على المئة دولار فأصبح سعر الجهاز 70 دولار.

كيفية التعامل مع هذا النوع من المسائل ؟

نحول التخفيضات إلى أرقام عشرية.

لدينا التخفيض الأول 10% يصبح 0 ,10

و التخفيض الثاني 20% يصبح 0 ,20

نطرح هذه الأرقام العشرية من الرقم مئة:

100 – 10 ,0 = 90 ,0

100 – 20 ,0 = 80 ,0

نضرب نواتج الطرح من مئة مع بعضها البعض 80 , 0× 90 , = 0 ,72

نطرح ناتج الطرح من الرقم 1,00

1,00 – 0,72 = 0.28

الرقم 0,28 يمثل حجم التخفيضات الحقيقية أي 28%

تمهيد عن محيط الدائرة:

محيط الدائرة = قطر الدائرة ×3,14

بمعنى أن محيط أي دائرة يعادل 3 أمثال طول قطرها تقريباً.

و يرمز للرقم الثابت 3,14 الذي يمثل النسبة بين محيط الدائرة و قطرها بالرمز بي π و يعتقد بأن أول ذكر للنسبة الثابتة بين محيط أي دائرة و قطرها قد ورد في التوراة في سفر الملوك

Kings 7:23 و سفر التقاويم Chronicles 4:2 حيث ورد أن محيط النبع الدائري الموجودة في قصر النبي سليمان يبلغ 30 ذراعاً أما قطر ذلك النبع فيبلغ 10 أذرع و بالتالي فإن 30 ÷ 10 = 3 وهي تقريباً النسبة بين قطر أي دائرة و بين محيطها.

قطر الدائرة : هو الخط الوهمي الذي يمر من مركزها و يشطرها إلى قسمين متساويين.

محيط الدائرة : هو خط دائري مغلق جميع نقاطه متساوية البعد عن المركز.

πرقم ثابت يستخدم في حساب محيط و مساحة الدائرة.

حدد أرخميدس(وفقاً لموسوعة الويكيبيديا) قيمة π بأنها النسبة بين محيط الدائرة و قطرها و هي 3.14 وهي نسبة ثابتة تستخدم في حساب محيط و مساحة الدائرة.

مسألة:

دائرتين مشتركتين في المركز و الدائرة الأولى تقع داخل الدائرة الثانية و يبعد محيط الدائرة الكبرى عن محيط الدائرة الصغرى 10 وحدات فماهو الفرق بين محيطي هاتين الدائرتين؟

الحل التقليدي:

يقوم الحل التقليدي لهذه المسألة على إيجاد قطر كلتا الدائرتين ومن ثم حساب محيط كلتا هاتين الدائرتين و بعد ذلك حساب الفرق بين محيطيهما كالآتي:

نفترض أن d يمثل قطر الدائرة الصغرى فإن قطر الدائرة الكبرى يعادلd+20

لماذا؟ لأن البعد بين محيط الدائرة الكبرى و بين محيط الدائرة الصغرى الموجودة داخلها هو 10 وحدات و كما نعلم فإن قطر الدائرة الدائرة الكبرى يساوي قطر الدائرة الصغرى الموجودة داخلها + البعد بين محيط الدائرة الصغرى و محيط الدائرة الكبرى ×2

أي 10 ×2= 20

و بالتالي فإن محيط الدائرة الصغرى يساوي π d أي d× π

أي$3.14 \times d$

أما محيط الدائرة الكبرى فإنه يساويπ (d+20)

أي$\pi \times d + 20$

حيث أن الرقم 20 يمثل مقدار زيادة قطر الدائرة الكبرى على الدائرة الصغرى و بالتالي فإن الاختلاف بين محيطي هاتين الدائرتين هو

$$\pi (d+20) - d \quad \pi = 20 \pi$$

أي محيط الدائرة الكبرى الذي هو عبارة عن قطر الدائرة الصغرى d + مقدار زيادته عن قطر الدائرة الصغرى أي 20 π × ناقص محيط الدائرة الصغرى = مقدار الاختلاف بين محيطي هاتين الدائرتين أي π20 ×

الطريقة الذكية في حل هذه المسألة:

بما أن المسألة لم تحدد لنا قياس أي من الدائرتين فبإمكاننا أن نتخيل أن الدائرة الصغرى الموجودة داخل الدائرة الكبرى متناهية الصغر بل إنها مجرد نقطة متطابقة مع مركز الدائرة الكبرى بل لنقل أن الدائرة الصغرى هي مركز الدائرة الكبرى.

و بالتالي فإن البعد بين محيطها و بين محيط الدائرة الكبرى هو بكل بساطة قطر الدائرة الكبرى , لماذا؟ لأن الدائرة الصغرى هي مركز الدائرة الكبرى و قطر الدائرة هو البعد بين المركز و المحيط و بالتالي فإن الاختلاف بين محيطها و بين محيط الدائرة الكبرى من حيث الامتداد هو محيط الدائرة الكبرى لأن الدائرة الصغرى مجرد نقطة قياسها صفر.

لقد حددت لنا المسألة البعد بين قطر الدائرة الكبرى و قطر الدائرة الصغرى بأنه 20 وحدة

)ربما 20 ميلي و ربما 20 سنتيمتر و ربما 20 متر أو 20 كيلو متر لا فرق) و بالتالي فإن قطر الدائرة الكبرى هو قطر الدائرة الصغرى مضافاً إلى عشرين وحدة قياس أياً تكن و بالتالي فإن محيط الدائرة الكبرى يساوي قطر الدائرة الصغرى +20 وحدة قياس مضروباً بالرقم الثابت π لأن قطر الدائرة الصغرى يساوي الصفر لأنه مجرد نقطة.

و بالتالي فإن مجمل طوله أي 20 π و هو الاختلاف بينه و بين محيط الدائرة الصغرى لأنه لا محيط لها و هكذا تلاحظون أننا وصلنا إلى حل المسألة ووصلنا إلى النتيجة نفسها لكن بمجهود أقل بكثير.

كيف قاس إيراتوسثينيس Eratosthenes محيط الكرة الأرضية باستخدام وتدين ؟

لقد إكتشف إيراتوسيثينيس قبل الميلاد بأكثر من 200 عام بأن أشعة الشمس تكون عمودية في مدينة أسوان المصرية في يوم معين من أيام السنة و أن أشعة الشمس في ذلك اليوم تتمكن من الوصول إلى قاع الآبار وهذا يعني أن أشعة الشمس تكون متعامدة مع الأرض في ذلك اليوم من السنة و عندما غرس إيراتوسيثينيس وتداً بشكل عمودي في ذلك اليوم لم يكن لذلك الوتد أي ظل لأن أشعة الشمس كانت موازية لذلك الوتد و في اليوم ذاته من سنة أخرى عند الظهيرة غرس إيراتوسيثينيس وتداً بشكل عمودي تماماً في مدينة الاسكندرية فلاحظ أن هنالك ظل لهذا الوتد و عندما قاس درجة ميلان ذلك الظل وجده يساوي 7,12 درجة أي 50/1 من 360 درجة

و بما أن أسوان و الإسكندرية يقعان على خط الطول ذاته تقريباً و بما أن أشعة الشمس تسقط بشكل متوازي و مستقيم على الأرض فهذا يعني أن أسوان تقع على قطر الدائرة حيث تسقط أشعة الشمس بشكل عمودي و بما أن درجة الميل بين الإسكندرية و سيناء هي 7,12 درجة أي 50/1 من 360 درجة و بما أن الدائرة الكاملة تساوي 360 درجة فهذا يعني أن المسافة بين أسوان و الإسكندرية تساوي جزء من خمسين جزء من محيط الكرة الأرضية و بما أن المسافة بين أسوان و الإسكندرية تساوي 5,000 ستاديا (أي 5000 ملعب مصري أو ملعب يوناني من حيث الطول) فهذا يعني أن محيط الكرة الأرضية يساوي 250,000 ستاديا أي 24,660

ميل و الاختلاف بين هذا الرقم و بين الرقم الحديث لمحيط الأرض هو 2% فقط فالرقم الحديث هو 24,900.

بسم الله الرحمن الرحيم

الخواص السحرية للعدد 9 التي اكتشفها علماء الرياضيات المسلمون:
التأكد من صحة العمليات الرياضية و استخدام العدد 9 السحري:
التأكد من صحة عملية الضرب:
$12 \times 14 = 168$
نجمع العددين الذين يشكلان الرقم 12
$1+2 = 3$
نجمع العددين الذين يشكلان الرقم 14
$4+1 = 5$
الآن نضرب ناتج جمع الرقم الأول أي 1+2 بناتج جمع الرقم الثاني أي 1+4
$3\times 5 = 15$
الآن نجمع العددين الذين يشكلان الرقم 15
$1+5 = 6$ انتبه لهذا العدد
الآن نجمع الأعداد التي تشكل حاصل ضرب 14 × 12 أي 168
$1+ 6+8 = 15$
نجمع العددين واحد وخمسة
$1+5 = 6$ إذاً الإجابة صحيحة.
****
*****
مثال آخر:
$14 \times 14 = 196$
نجمع الأعداد التي تشكل الرقم 14
$1+4= 5$
$1+4= 5$
نضرب النواتج مع بعضها
$5 \times 5 = 25$
نجمع الأرقام التي تشكل ناتج عملية الضرب
$5+2 = 7$ انتبه لهذا العدد
الآن نجمع أعداد إجابة 14 × 14 أي الرقم 196
$1+6+9 = 16$
نجمع العددين الذين يشكلان الرقم 16 مع بعضهما
$1+6 = 7$ إذاً الإجابة صحيحة.
****
يمكننا أن نحذف الرقم تسعة أينما ورد عند التأكد من صحة عمليات الضرب دون أن تتأثر النتيجة كما في المثال التالي:
$14 \times 14 = 196$
$4+1 = 5$
$4+1=5$

5× 5 = 25
7 = 2+5انتبه لهذه النتيجة
الآن نأتي لنتيجة عملية الضرب أي 196
1+6+9 = 16
ناتج جمع أعداد الرقم 16 هي 6+1 = 7 انتبه لهذه النتيجة
الآن يمكننا أن نحذف الرقم تسعة و أن نتجاهل وجوده فنقول:
196
7 = 6+1إذاً عملية الضرب صحيحة.
****

إن حذف العدد تسعة يمكن أن يوفر علينا الكثير من الوقت عند التحقق من صحة العمليات الحسابية و المذهل حقاً أننا لا نحذف العدد 9 فقط بل إن بإمكاننا أن نحذف جميع الأعداد التي يكون ناتج جمعها 9:
12 × 14 = 168
لنتحقق من صحة هذه العملية
في النتيجة 168 لدينا عددين حاصل جمعهما 9 و هما بالطبع 8+1 لذلك نقوم بحذفهما فماذا يبقى لدينا ؟
يبقى لدينا العدد 6 (انتبه لهذا العدد جيداً(
الآن 2+1 = 3
4+1= 5
5 × 3 = 15
الرقم خمسة عشر عبارة عن 5 +1 = 6 إذاً النتيجة صحيحة (قارناها بالعدد 6 الذي حصلنا عليه بعد حذف العددين 8 و 1 من النتيجة 168 لأن مجموعهما يساوي 9. (
****
قد تعجب إن قلت لك أن الطريقة السابقة صالحة للاستخدام مع عمليات الضرب ذات الأرقام الفلكية كما في المثال التالي:
هل عملية الضرب التالية صحيحة ؟
12345678 × 89045 = 1099320897510
لنستخدم طريقة حذف العدد تسعة و حذف جميع الأعداد التي مجموعها 9 حتى نتأكد من صحة هذه العملية :
12345678
9 =2+7لذلك نحذفهما
9 = 5+4لذلك نحذفهما
9 = 1+8لذلك نحذفهما
9 = 6+3نحذفهما
ماذا يبقى لدينا من الرقم 12345678 ؟ يبقى لدينا العدد صفر.
الآن الحد الثاني 89045
نحذف العدد 9 مباشرةً ثم نحذف العددين 4و5 لأن 4+5 = 9 فيبقى لدينا العدد 8.
الآن نأتي للإجابة : 1099320897510
نحذف العدد 9 أينما ورد
9 =8+1نحذفهما
9 = 2+7نحذفهما

1+5+3 = صفر
يبقى لدينا صفر
الآن نضرب الأرقام المتبقية مع بعضها فإذا كان الناتج صفراً كانت النتيجة صحيحة:
صفر × 8 = صفر إذا النتيجة صحيحة.
****
لنتأكد من صحة ناتج عملية الضرب التالية:
137 × 456 = 62472
الحد الأول 137 أي 1+3+7 = 11
11عبارة عن 1+1 = 2
الحد الثاني 456 لدينا 4+5 = 9 لذلك نحذفهما فيبقى لدينا العدد 6.
الآن النتيجة 62472
7+2 = 9لذلك نحذفهما فتبقى لدينا الأعداد 624
4+2+6 = 12وهي عبارة عن 1+2 = 3 انتبه لهذا العدد
الآن لدينا العددين 2 و 6
2 × 6 = 12وهي عبارة عن 2+1 = 3 إذاً النتيجة صحيحة.
****
لنتأكد من صحة ناتج عملية الضرب التالية:
456 × 831 = 368936
الحد الأول 456
4+5 = 9لذلك نحذف العددين 4 و 5 فيبقى لدينا العدد 6
الحد الثاني 831
8+1 = 9لذلك نحذف العددين 8 و 1 فيبقى لدينا العدد 3
النتيجة 368936
6+3 = 9لذلك نحذفهما
نحذف العدد 9
6+3 = 9لذلك نحذفهما فيبقى لدينا العدد 8
الآن لدينا ثلاثة أعداد وهي 6 من الطرف الأول لعملية الضرب و العدد 3 من الطرف الثاني لعملية الضرب و العدد 8 من النتيجة.
نجري عملية ضرب لطرفي عملية الضرب بعد اختزالهما:
6 × 3 = 18و العدد 18 عبارة عن 8+1 = 9 لذلك نحذفهما لأن مجموعهما 9 , و لكن يبقى لدينا 8 من النتيجة فماذا يعني هذا ؟ هذا يعني أن عملية الضرب السابقة خاطئة.
****
لنتأكد من صحة ناتج عملية الضرب التالية:
456 × 831 = 378936
4+5 = 9نحذفهما فيبقى لدينا العدد 6
8+1 = 9نحذفهما فيبقى لدينا العدد 3
نجري عملية ضرب بعد الاختزال : 6× 3 = 18 بالطبع فإن الرقم 18 عبارة عن 8+1
8+1 = 9انتبه لهذا الرقم لأننا سنقارنه لا حقاً بالنتيجة بعد اختزالها
الآن لنحلل نتيجة عملية الضرب : 378936
6+3 = 9نحذفهما

نحذف العدد 9 فتبقى لدينا الأعداد 378
18 = 8+7+3أي 1+8 = 9 إذاً النتيجة صحيحة.
****
لنتأكد من صحة ناتج عملية الضرب التالية:
97 × 48 = 4656
النتيجة 4656
9 = 5+4نحذف العددين 4 و 5 لأن مجموعهما 9 فيبقى لدينا العددين 6 و 6 الآن
12 = 6+6أي 1+2 = 3
48
12 = 4+8أي 1+2 = 3
97
نحذف العدد 9 فيبقى لدينا العدد 7
الآن نضرب طرفي عملية الضرب ببعضهما بعد الاختزال و حذف العدد 9 و مكوناته
21 = 3 × 7أي 1+2 = 3 إذاً عملية الضرب صحيحة.
****
التأكد من صحة عمليات الجمع بحذف العدد السحري 9 و مكوناته:
****
رأينا سابقاً كيف يمكن التحقق من صحة عملية الضرب بحذف العدد 9 و مكوناته و هذه الطريقة تنجح كذلك في التأكد من صحة عمليات الجمع كما في المثال التالي:

12345
67890
41735+
21865

143835

12345+67890+41735+21865=143835
12345هنا 5+4 = 9 نحذفهما فيبقى لدينا 123 أي 1+2+3 = 6
67890نحذف العدد 9 فتبقى لدينا الأعداد 678 أي 8+7+6 = 21 أي 1+2 = 3
41735هنا 5+4 = 9 لذلك نحذفهما فتبقى لدينا الأعداد 173 أي 1+7+3 = 11 أي 1+1 =2
21865هنا 8+1 = 9 لذلك نحذفهما فتتبقى لدينا الأعداد 562 أي 5+6 +2 = 13
أي 3+1 = 4
الآن تبقى لدينا الأعداد التالية : 6 – 3 – 2 – 4
9 = 3+6لذلك نحذفهما فتبقى لدينا الأعداد 2 و 4 أي 2+4 = 6 انتبه لهذا العدد
الآن النتيجة 143835
9 = 4+5نحذفهما
9 = 1+8نحذفهما
يبقى لدينا العددين 3 و 3 أي 3+3 = 6 إذاً النتيجة صحيحة.

يمكننا في عمليات الجمع أن نجمع الأعداد بشكل عشوائي حتى نحذف العدد 9 السحري.

234
671+
855

1670
2من السطر الأول + 7 من السطر الثاني = 9 لذلك نحذفهما
3من السطر الأول + 6 من السطر الثاني = 9 لذلك نحذفهما
4من السطر الأول + 5 من السطر الثالث = 9 لذلك نحذفهما
1من السطر الثاني + 8 من السطر الثالث = 9 لذلك نحذفهما
يبقى لدينا العدد 5 من السطر الثالث (تذكر هذا الرقم(
الآن لنقم بتحليل النتيجة 1670
1670تعني صفر + 6+7+1 = 14
الرقم 14 عبارة عن 1 +4 = 5
إذاً العملية صحيحة.

التأكد من صحة عمليات الطرح بحذف العدد السحري 9 و مكوناته:

لدينا عملية الطرح التالية:
8465
3896-

4569
الرقم الأول : 8465 لدينا هنا 5+4 = 9 نحذفهما فيبقى لدينا العددين 6 و 8 أي 6+8 = 14
و الرقم 14 يتألف من 1+4 = 5 , و هكذا يبقى لدينا العدد 5
الرقم الثاني : 3896 هنا 6+3 = 9 لذلك نحذفهما فيبقى لدينا العدد 8
النتيجة 4569 نحذف منها الرقم 9 كما نحذف كذلك الرقمين 4 و 5 لأن 4+5 = 9 فيبقى لدينا العدد 6.
الآن تصبح عملية الطرح كالآتي:
5 – 8 = 6فهل هذه العملية صحيحة ؟
عند التأكد من صحة عملية الطرح باستخدام طريقة حذف العدد 9 نقوم بإضافة العدد 9 للرقم المطروح منه
و نطرح بعد ذلك بشكل عادي:
5 + 9 – 8 = 6
5+9 = 14
14 – 8 = 6إذاً عملية الطرح صحيحة
اختبر صحة نتيجة عملية الضرب التالية:
21 × 23 = 483
21عبارة عن 1+2 = 3
23عبارة عن 3+2 =5
النتيجة 483 عبارة عن 3+8+4 = 15
و الرقم 15 بدوره عبارة عن 5+1 = 6

الآن نضرب ناتج جمع الحد الأول مع ناتج جمع الحد الثاني و نقارنها بالرقم 6 الذي حصلنا عليه بجمع الأعداد المكونة للرقم 483
$3 \times 5 = 15$
و الرقم 15 عبارة عن 1+5 = 6 إذاً النتيجة صحيحة.

التأكد من نتيجة عملية الضرب التالية : 31 × 23 = 713
31هنا 1+3 = 4
23هنا 3+2 = 5
20 = 5×4و الرقم 20 عبارة عن 2 +صفر = 2 انتبه لهذا العدد
النتيجة 713 عبارة عن 7+1+3 = 11
الرقم 11 عبارة عن 1+1 = 2 إذاً النتيجة صحيحة.

التأكد من نتيجة عملية الضرب التالية : 51 × 64 = 3264
51عبارة عن 1+5 = 6
64عبارة عن 4+6 = 10
الرقم 10 عبارة عن 1+ 0 = 1
الآن نضرب 6 ×1 = 6 انتبه لهذا العدد
الآن نأتي إلى النتيجة:
3264في هذا الرقم 4+2+3 = 9 لذلك نحذفها فيبقى لدينا العدد 6 إذاً عملية الضرب صحيحة.

الضرب بالرقم 11

أنتم تعلمون بأننا عندما نضرب الرقم 11 بالأعداد من 1 إلى 9 فإننا نضاعفه
فمثلاً 9 ×11 = 99 و 8 × 11 = 88 و لكن كيف نضرب رقماً يتألف من عددين بالرقم 11 ؟
ببساطة شديدة فإننا عندما نضرب الرقم 11 بأي رقم يتألف من عددين فإننا نجمع هذين العددين و نضع نتيجة الجمع بينهما كما في المثال التالي:
= 14× 11نجمع العددين 4 و 1
5 = 1+4الآن نضع العدد 5 بين العددين 1 و 4 فيصبح الناتج 154
$11 \times 14 = 154$

= 11 × 23
5 = 2+3نضع العدد 5 بين العددين 3 و 2 فيصبح الناتج
$11 \times 23 = 253$

= 11 × 62
8 = 6+2نضع العدد 8 بين العددين 2 و 6 فتصبح النتيجة كالآتي:
$11 \times 62 = 286$

= 11 × 36

$6+3 = 9$ نضع العدد 9 بين العددين 6 و 3 فيصبح الناتج
$11 \times 36 = 396$

$11 \times 25 =$
$5+2 = 7$ نضع العدد 7 بين العددين 6 و 3 فيصبح الناتج كالتالي:
$11 \times 25 = 275$

ولكن ماذا لو كان ناتج جمع هذين العددين أكبر من عدد واحد كما في هذا المثال:
$11 \times 84 =$
$4+8 = 12$ أصبح لدينا عددين هما 1 و 2 و ليس عدد واحد فكيف نتصرف في مثل هذه الحالة ؟
في هذه الحالة نقوم بالتالي:
1. نضيف عدد العشرات إلى العدد الأيسر.
2. نضع عدد الآحاد بين العددين الذين قمنا بجمعهما.
هنا $8 +4 = 12$
نضيف العدد 1 إلى العدد 8 فيصبح 9
$8+1 = 9$
يبقى لدينا العدد 2 نضعه في المنتصف فتصبح النتيجة كالتالي:
$11 \times 84 = 924$

$11 \times 28 =$
$2+8 = 10$
$1+2 = 3$
نضع الصفر في المنتصف فتصبح النتيجة:
$11 \times 28 = 308$

$11 \times 95 =$
$5+9 = 14$
نضيف 1 على العدد 9 فيصبح 10 و نضع العدد 4 في المنتصف فيصبح الناتج كالتالي:
$11 \times 95 = 1045$

ضرب الرقم 11 برقم ثلاثي:
نضع العدد صفر في إلى يسار الرقم الذي نضربه.
نجمع العدد الأول مع العدد صفر
نجمع العدد الأول مع العدد الثاني
نجمع العدد الثاني مع العدد الثالث
نجمع العدد الثالث مع العدد صفر الذي وضعناه
مثال : $11 \times 123=$
نضع العدد صفر في إلى يسار الرقم الذي نضربه.
0123
نجمع العدد الأول مع العدد صفر

3+ 0 = 3
نجمع العدد الأول مع العدد الثاني
2+3 = 5
نجمع العدد الثاني مع العدد الثالث
2+1 = 3
نجمع العدد الثالث مع العدد صفر الذي وضعناه
1+0 = 1
فيصبح لدينا الرقم 1353
123 ×11 = 1353

---

11 × 471 =
نضع صفر إلى يسار الرقم الثلاثي فيصبح رقماً رباعياً 0471
نبدأ بجمع الأرقام مع بعضها
1+0 = 1
1+7 = 8
11 = 7+4نكتب 1 و نحمل الواحد الآخر و نضيفه للعدد التالي 4
4 +1 = 5
يصبح لدينا 1 8 1 5
11 × 471 = 5181

طرق حديثة لإجراء العمليات الرياضية:

عمليات الضرب:
ما هي نتيجة 6×8
ماهو العدد الذي يحتاجه العدد 6 حتى يصبح 10 ؟
-4 = 6 -10العدد سالب لذلك نطرح
ماهو العدد الذي يحتاجه العدد 8 حتى يصبح 10 ؟
-2 = 8 – 10العدد سالب لذلك نطرح
الآن نطرح من كل عدد منقوص العدد الثاني أي نطرح من العدد 6 العدد الذي يحتاجه العدد 8 حتى يصبح عشرة كما نطرح من العدد 8 العدد الذي يحتاجه العدد 6 حتى يصبح عشرة كالتالي:
8-4 = 4
6-2 = 4
العدد 4 هو الجزء الأيسر من الإجابة (أي العشرات)
الآن نضرب النواقص مع بعضها فنحصل على الجزء الأيمن من الإجابة (أي الآحاد)
2×4 = 8
فتصبح النتيجة كالآتي 6× 8 = 48

مثال آخر:

8 × 7 =

2 - = 8 – 10العدد سالب لأن 8 تحتاج إلى 2 حتى تصبح 10 لذلك فإننا نطرح.

-3 = 7 – 10العدد سالب لأن 7 تحتاج إلى 3 حتى تصبح 10 لذلك فإننا نطرح.

الآن نطرح من كل عدد منقوص العدد الثاني أي نطرح من العدد 8 العدد الذي يحتاجه العدد 7 حتى يصبح عشرة كما نطرح من العدد 7 العدد الذي يحتاجه العدد 8 حتى يصبح عشرة كالتالي:

7-2 = 5

8 – 3 = 5

نضع ناتج عملية الطرح وهو العدد 5 كإجابة أولى في خانة العشرات.

الآن نضرب النواقص مع بعضها البعض 2 ×3 = 6

نضع الناتج في خانة الآحاد فتصبح النتيجة كالتالي:

7 × 8 = 56

---

96 × 97 =

4 = 96 - 100الرقم سالب لذلك فإننا نطرح

3 = 97 - 100العدد سالب لذلك فإننا نطرح

الآن نطرح من كل عدد منقوص العدد الثاني أي نطرح من الرقم 96 العدد الذي يحتاجه الرقم 79 حتى يصبح 100 كما نطرح من العدد 97 العدد الذي يحتاجه العدد 96 حتى يصبح 100 كالتالي:

96 – 3 = 93

97 - 4 = 93

الرقم 93 هو النتيجة الأولى لذلك نضعه في خانة الآلاف و المئات.

نضرب النواقص مع بعضها و نضعها في خانة الآحاد و المئات 4 ×3 = 12

تصبح النتيجة كالتالي 96 × 97 = 9312

العمليات على الأرقام العشرية:

عندما نضرب رقماً عشرياً بالعدد 10 نحرك الفاصلة خانة واحدة نحو اليمين:

14 = 1,4 × 10الفاصلة أصبحت إلى يميت الرقم 14 أي أنها أصبحت بلا أهمية.

, 14

عندما نضرب رقماً عشرياً بالرقم مئة نحرك الفاصلة خانتين نحو اليمين و إن لم يكن هنالك عددين نضيف صفراًَ إلى يمين الرقم:

140 = 1,4 × 100لاحظ كيف أضفنا صفراً إلى يمين الرقم 14 و كيف حركنا الفاصلة خانتين إلى اليمين فأصبحت بلا فائدة.

,140

عندما نقسم رقماً عشرياً على الرقم عشرة نحرك الفاصلة خانة واحدة إلى اليسار.

14 ÷ 10 = 1,4

عندما نقسم رقماً عشرياً على الرقم مئة نحرك الفاصلة بمقدار خانتين إلى اليسار و إن لم يكن هنالك 3 أعداد نضيف صفراً إلى يسار الرقم.

0,14 = 100 ÷ 14لاحظ كيف أضفنا صفراً على يسار الرقم العشري.

ضرب الأرقام العشرية:

1,4 × 1,2 =
لكي نجعل من عملية الضرب هذه أكثر سهولة نزيل الفواصل فتصبح عملية ضرب اعتيادية:
14 × 12 =
هذين الرقمين قريبين من الرقم عشرة لذلك نعتبره رقماً مرجعياً.
4 = 10 – 14النتيجة موجبة لأن الرقم 14 أكبر من الرقم المرجعي 10 لذلك فإننا سنقوم بعد ذلك بعملية جمع.
2 = 10 – 12النتيجة موجبة لأن الرقم 12 أكبر من الرقم المرجعي 10 لذلك فإننا سنقوم بعد ذلك بعملية جمع.
الآن نجمع بشكل تصالبي أي نجمع العدد 14 مع ناتج طرح 12 -2
و يمكن أن نجمع العدد 12 مع ناتج طرح 14 – 2
وبعد ذلك نضرب الناتج بالعدد المرجعي عشرة
12 + 4 = 16
16 × 10 (الرقم المرجعي) = 160
الآن نضرب الزوائد (أي 2 و 4 مع بعضها(
2 × 4 = 8
168 = 8 + 160أي أن 14 × 12 = 168
نعد الأرقام الموجودة بعد الفاصلة في الرقمين الذين ضربناهما ببعضهما البعض
1,4 × 1,2 =
لدينا عددين يقعان بعد الفاصلة و هما العدد 4 و العدد 2
العدد 4 في 1,4 و العدد 2 في 1,2
و هذا يعني أنه يتوجب وجود عددين بعد الفاصلة في نتيجة الضرب 168
لذلك نزيح الفاصلة بمقدار خانتين أو رقمين و نضعها بين العدد 6 و العدد 1فتصبح النتيجة النهائية 1,68

كيف نضرب رقم عشري برقم عادي ؟

---

97 × 9,6 =
بما أن الرقم 97 قريب من الرقم مئة فإن نختار الرقم مئة كرقم مرجعي
نزيل الفواصل من الرقم العشري 9,6 فيصبح 96
الآن نطرح الرقمين من الرقم المرجعي مئة
3 = 97 – 100النتيجة سالبة لأن العدد 100 أكبر من 97 فالعدد 3 هو نقص و ليس زيادة و بما أن النتائج سالبة فإننا سنطرح لاحقاً.
4 = 96 + 100النتيجة سالبة لأن العدد 100 أكبر من 96 فالعدد 4 هو نقص و ليس زيادة و بما أن النتائج سالبة فإننا سنطرح لاحقاً.
الآن نطرح بشكل تصالبي (لماذا نطرح ؟ لأن الأعداد التي نضربها ببعضها أقل من العدد المرجعي مئة(
نقول 96 -3 = 93 أو نقول 97 – 4 = 93 لا حظ أن النتيجة دائماً تكون واحدة في عمليات الجمع و الطرح التصالبي.
الآن نضرب نتيجة الطرح أي 93 بالعدد المرجعي مئة:
93 × 100 = 9300

الآن نضرب النواقص 4 و 3 مع بعضها البعض و نضيف النتيجة للرقم 9300
$3 \times 4 = 12$
$12 + 9300 = 9312$
طبعاً نحن لم ننتهي من عملية الضرب لأنكم تذكرون بأن أحد حدي هذه العملية وهو الرقم 9,6 هو رقم عشري و يحوي رقماً واحداً يقع بعد الفاصلة أما حد عملية الضرب الثاني فإنه لا يحوي أي فاصلة لذلك فإننا نحرك الفاصلة خانة واحدة و نضعها بين العدد 1 و العدد 2:
931,2

أين نضع الفاصلة في عملية الضرب التالية:
14 , 0 × 13 , 0
أي 14 × 13 = 182
لدينا عددين يقعان بعد الفاصلة في الحد الأول14 , 0 و هما 1 و 4.
لدينا عددين يقعان بعد الفاصلة في الحد الثاني 13 , 0 وهما 3 و 1
إذاً علينا أن نزيح الفاصلة 4 خانات أو أربع أرقام في نتيجة الضرب خانتين من أجل العددين الذين يقعان بعد الفاصلة في الحد الأول و خانتين من أجل العددين الذين يقعان بعد الفاصلة في الحد الثاني.
و لكن كيف نزيح الفاصلة 4 خانات و ليس لدينا في نتيجة الضرب سوى 3 خانات 182 ؟
في مثل هذه الحالة يتوجب علينا أن نضيف صفرا و أن نضع فاصلة من بعد ذلك الصفر و أن نضع صفراً آخر بعد الفاصلة كالآتي:
0,0182

أين نضع الفاصلة في عملية الضرب التالية:
1,4 × 0,014 =
$14 \times 14 = 196$
لدينا أربعة أعداد تقع بعد الفاصلة في حدي عملية الضرب ففي الحد الأول 1,4 لدينا عدد واحد يقع بعد الفاصلة و هو العدد 4 أما في الحد الثاني 0,014 فلدينا ثلاثة أعداد هي 014
لذلك يتوجب علينا أن نزيح الفاصلة بمقدار أربع خانات في نتيجة الضرب خانة من أجل العدد 4 الذي يقع بعد الفاصلة و 3 خانات من أجل الأعداد 014
و بما أن لدينا ثلاث خانات في الإجابة فقط هي 169 فيتوجب علينا أن نضيف صفراً إلى يسار العدد و أن نضع بعده فاصلة و أن نضيف بعده صفراً آخر:
0,0196

رأينا سابقاً كيف نزيل الفواصل عند إجراء عملية الضرب على الأرقام العشرية حتى نجعل من عملية الضرب أكثر سهولة , لكننا أحياناً نضيف فواصل في عملية الضرب لكي نجعلها أكثر سهولة كما هي الحال عندما نريد التوصل إلى عدد مرجعي واحد لطرفي عملية الضرب كما في المثال التالي:
لدينا عملية الضرب التالية : 8 ×79 حيث نحتاج في عملية الضرب هذه إلى عددين مرجعيين هما الرقم عشرة من أجل العدد 8 و الرقم المرجعي 100 من أجل الرقم 79 لأن العدد 8 اقرب إلى الرقم المرجعي 10 بينما الرقم 79 أقرب إلى الرقم المرجعي مئة.
في هذه الحالة نضيف فاصلة و صفر إلى العدد 8 فيصبح 8,0 أي 80
فتصبح عملية الضرب كالآتي 80 × 79
العدد المرجعي لكلا هذين الرقمين أصبح العدد مئة.

20 = 80 – 100نتيجة سالبة لأن 100 أكبر من 80
21 = 79 - 100نتيجة سالبة لأن العدد المرجعي 100 أكبر من الرقم 79 و بما أن النتيجتين سلبيتين أي أنهما عبارة عن نواقص تنقصنا حتى نبلغ الرقم مئة فإننا سنقوم لا حقاً بعملية طرح.
الآن نطرح بشكل تصالبي أي نطرح 20 من 79 أو نطرح 21 من 80 و في كلا الحالتين نحصل على النتيجة ذاتها أي 59
80 – 21 = 59
79 – 20 = 59
الآن نضرب هذه النتيجة بالعدد المرجعي 100
59 × 100 = 5900
الآن نضرب النواقص مع بعضها 20 × 21 = 420
ونجمع الناتج مع العدد 5900
5900 + 420 = 6320
الآن أين نضع الفاصلة ؟
كم فاصلة لدينا في حدي عملية الضرب ؟ لدينا فاصلة واحدة وهي الفاصلة التي أضفناها للعدد 8 فأصبح 8,0 و من ثم 80 لذلك فإننا نضع الفاصلة بعد رقم واحد فقط فتصبح النتيجة
632,0
لنختبر صحة عملية الضرب السابقة باستخدام طريقة حذف العدد 9:
8 ×79 = 632
9 = 3+6نحذفهما فيبقى لدينا العدد 2
79هنا نحذف العدد 9 فيتبقى لدينا العدد 7
8هنا تبقى كما هي
هنا أصبحت عملية الضرب بعد الاختزال كالتالي:
2 = 7 × 8فهل هذا صحيح و نحن نعلم أن 8 × 7 = 56
الآن الرقم 56 عبارة عن 6+5 = 11 و الرقم 11 عبارة عن 1+1 = 2 إذاً النتيجة صحيحة.

---

98 × 968
هنا الحد الأول 98 يتألف من عددين بينما الحد الثاني 968 يتألف من ثلاثة أعداد لذلك نضيف فاصلة و صفر للعدد 98 حتى يصبح مماثلاً للحد الثاني فيصبح 98,0 أي 980
أصبحت لدينا العملية التالية 980 × 968
الرقم المرجعي هنا هو الرقم ألف لأنه أقرب رقم مكتمل لكل من 980 و 968
الآن علينا أن نجد كم تنقص هذه الأعداد عن الرقم المرجعي (الألف.)
32 = 968 - 1000طبعاً النتيجة سالبة لأن الرقم 968 أقل من ألف.
20 = 980 – 1000طبعاً النتيجة سالبة لأن الرقم 980 أقل من ألف.
و بما أن النتائج سالبة فإننا سنطرح بشكل تصالبي:
948 = 20 – 968طبعاً كان بإمكاننا أن نختار 980 – 32 لكننا اخترنا الطرف الأسهل و على كل حال فإن النتيجة واحدة.
الآن نضرب الرقم 948 بالرقم المرجعي 1000
948 × 1000 = 948000
الآن نضرب النواقص مع بعضها:
32 × 20 = 640

للضرب بالرقم 20 نضرب بالعدد 2 ثم نضرب بالعدد 10
الآن نجمع العدد 948000 مع نتيجة ضرب النواقص
948000 + 640 = 948640
لاحظ أننا وضعنا 640 مكان الأصفار
و بما أن حدي عملية الضرب يحويان عدداً واحداً بعد الفاصلة 98,0 فإننا نضع الفاصلة في نتيجة عملية الضرب بعد رقم واحد : 94864,0

الآن لنتأكد من صحة العملية السابقة:
980 × 968 = 94864
94864نحذف العدد 9 فتبقى لدينا الأعداد 46 84
6+ 4 +4 +8 = 22
22هنا عبارة عن 2 +2 = 4 انتبه لهذه النتيجة
الآن الحد 968 نحذف العدد تسعة فتبقى لدينا 6 + 8 = 14 أي 4+1 =5
الآن الحد 98 نحذف العدد 9 فيبقى لدينا 8
أصبح لدينا 4 من النتيجة و 5 من الحد الأول و 8 من الحد الثاني و أصبحت عملية الضرب كالتالي : 8 × 5 = 4 فهل هذه العملية صحيحة ؟ لنرى.
40 = 5 × 8أي 4+0 = 4 إذاً النتيجة صحيحة.

عملية الطرح الحديثة:

---

123 – 75 =
العدد المرجعي هنا هو العدد مئة لأنه أقرب رقم كامل لكل من 123 و 75
الآن كم تنقص أو كم تزيد هذه الأعداد عن الرقم المرجعي 100
23 = 100 - 123نتيجة موجبة لأن الرقم 123 أكبر من الرقم المرجعي مئة.
25 = 75 – 100نتيجة سالبة لأن الرقم المرجعي 100 أكبر من الرقم 75
الآن نجمع النواقص و الزوائد مع بعضها:
23 + 25 = 48
إذاً 123 – 75 = 48

---

364 – 278 =
المرجع هنا هو الرقم 300 لأنه أقرب رقم كامل إلى هذين العددين.
الآن كم تنقص و كم تزيد هذه الأرقام عن الرقم المرجعي 300
64 = 300 – 364نتيجة موجبة لأن الرقم 364 أكبر من الرقم المرجعي.
22 = 278 – 300نتيجة سالبة لأن الرقم 278 أقل من الرقم المرجعي.
الآن نجمع الزوائد مع النواقص:
64 + 22 = 86
إذاً 364 – 278 = 86

الطرح من الأعداد المنتهية بعدد كبير من الأصفار:
اطرح الآحاد من عشرة
اطرح بقية الأعداد من 9
اطرح العدد واحد من العدد الذي يقع يسار الأصفار
التنفيذ العملي:
1000- 368 =
اطرح الآحاد من عشرة
2 = 8- 10نضع الناتج على اليمين
اطرح بقية الأعداد من 9
9-6 = 3
9-3 = 6
اطرح العدد واحد من العدد الذي يقع يسار الأصفار (من العدد المطروح منه أي 1000(
العدد الذي يقع يسار الأصفار هو العدد 1 في الرقم 1000
الآن 1 – 1 = 0
و هكذا تصبح النتيجة كالتالي
632
إذاً 1000 – 368 = 632

جدول ضرب العدد 14

لكي نضرب أي عدد بالعدد 14 فإننا نضرب ذلك الرقم بالعدد 7 ثم نضرب الناتج بالعدد 2
مثال : 6 × 14=
6 × 7 = 42
42 × 2 = 84
و يمكننا أن نضرب ذلك العدد بالعدد 2 قبل أن نضربه بالعدد 7
6 × 14 =
6 × 2 = 12
12 × 7 = 84
6 × 14 = 84

قابلية القسمة:

جميع الأرقام المنتهية بصفر و 2 و 4 و 6 و 8 قابلة للقسمة على 2
جميع الأرقام التي مجموعها قابل للقسمة على 3 تكون قابلة للقسمة على 3 مثلاً الرقم 27
9 = 2+ 7العدد 9 قابل للقسمة على 3 دون أي باقي 9 ÷ 3 = 3 وهذا يعني أن العدد 27 قابل للقسمة على 3.
إذا كان آخر عددين في رقم ما يقبلان القسمة على 4 فهذا يعني أن ذلك الرقم يقبل القسمة على 4 مثال الرقم 999988 ÷ 4 = 249997
آخر عددين 8 و 8 يقبلان القسمة على 4 فهذا يعني أن الرقم بأكمله يقبل القسمة على 4

كل رقم ينتهي بأحد العددين صفر أو 5 قابل للقسمة على 5.
قابلية القسمة على 7:
نضرب العدد الآخير بالعدد 5 و نضيف الإجابة إلى الأعداد التالية فإذا كانت النتيجة قابلة للقسمة على 7 كان الرقم كله قابلاً للقسمة على العدد 7
مثال 343
آخر عدد هو العدد 3 نضربه بالعدد 5
$3 \times 5 = 15$
الأرقام التالية هي 34
$15 + 34 = 49$
49قابلة للقسمة على العدد 7 و هذا يعني أن الرقم 343 قابل للقسمة على 7.
$343 \div 7 = 49$
قابلية القسمة على العدد 8
هل الرقم 55328 يقبل القسمة على العدد 8 ؟
نضيف العدد 4 إلى آخر عددين من هذا الرقم و هما 28
$28 + 4 = 32$
إذاً العدد 32 يقبل القسمة على 8.
$32 \div 8 = 4$
و هذا يعني أن الرقم 55328 يقبل القسمة على 8
$55328 \div 8 = 6916$
قابلية القسمة على 9:
إذا كان مجموع أعداد رقم ما يساوي 9 أو كان أحد مضاعفات العدد 9 فإن ذلك الرقم يقبل القسمة على 9.
لدينا الرقم 45723618 هل يقبل القسمة على 9 ؟
نقول $8+1 +6 + 3 + 2 + 7+4+5 = 36$
و العدد 36 من مضاعفات العدد 9 حيث أن $36 \div 9 = 4$
$45723618 \div 9 = 5080402$
قابلية القسمة على عشرة:
كل رقم ينتهي بالعدد صفر قابل للقسمة على عشرة.

قابلية القسمة على 12:
إذا كان مجموع أعداد الرقم قابلاً للقسمة على 3 و إذا كان آخر عددين يقبلان القسمة على 4 كان هذا الرقم قابلاً للقسمة على 12.
مثال الرقم 588
$8+8+ 5 = 21$
$21 \div 3 = 7$
مجموع أعداد الرقم 588 تقبل القسمة على 3 و آخر عددين أي 88 يقبلان القسمة على 4.
إذاً الرقم 588 يقبل القسمة على 12
$588 \div 12 = 49$

الأرقام السلبية و الأرقام الموجبة

الأرقام الموجبة هي الأرباح و الزيادات أما الأرقام السالبة فهي الخسائر و النواقص , و الخسائر و النواقص مهما زادت لا يمكن أن تتحول إلى أرباح فإذا كان لدي 3 فواتير يتوجب علي دفعها و كانت قيمة كل فاتورة 10 دولارات فإنني أعبر عن ذلك كالآتي:

+3 × -10 = -60

الموجب × السالب = سالب

لذلك فإننا عندما نضرب رقماً موجباً برقم سالب فإن النتائج تكون سالبة لأننا في مثل هذه العملية نحسب خسائرنا.

الآن لو جاء شخص ما و أخذ مني تلك الفواتير فإني أعبر عن ذلك بالعلاقة التالية:

-3 × -10 = +60

السالب × السالب = موجب

لأني نجوت من خسارة 60 دولارا

ضرب الأعداد الثنائية المنتهية بالعدد 5

مثال 75 × 75=

نأخذ العدد الثاني أي 7 و نضيف إليه العدد 1

7 = 1 = 8

الآن نضرب الناتج بالعدد الأصلي أي 7

7 × 8 = 56

الآن نضرب العدد 5 بنفسه 5 ×5 = 25

الآن أصبح لدينا الرقمين 25 و 56 فماذا نفعل بهما ؟

نقوم بوضعهما بجانب بعض 5625

إذاً 75 × 75 = 5625

ودائما في مثل هذه الحالات تنتهي تلك الأرقام ب 25

تم بعون الله وحده

الرياضيات خطة بخطوة

د.عمار شرقية